القيمة القصوى المطلقة لدالة (*Absolute extrema of the function*)

تعريف (3 -7- 1) النقاط الحرجة (Critical Points)

لتكن f دالة ، ولتكن النقطة $P(c, f(c))$ من نقط الدالة اذا حققت احد الشرطين :

١) $f'(c) = 0$ ، **٢)** $f'(c)$ **غير موجودة**

وسنقتصر في دراستنا على النوع الأول .

مثال ٢٧ : جد النقط الحرجة للدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

الحل : $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$$0 = 3x^2 - 6x - 9 \Rightarrow 3(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow$$

$$3(x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3 \quad \text{or} \quad x = -1$$ **نقطتان حرجتان**

$$f(3) = 27 - 27 - 27 = -27 \Rightarrow (3, -27)$$ **نقطة حرجة**

$$f(-1) = -1 - 3 + 9 = 5 \Rightarrow (-1, 5)$$ **نقطة حرجة**

مثال ٢٧ : جد النقط الحرجة للدالة $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+1}$

الحل :

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(6) - 6x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{6 - 6x^2}{(x^2+1)^2}$$

وعندما $f'(x) = 0$ **نحصل على :**

$$6 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x = \mp 1$$ **نقطتان حرجتان**

$$f(1) = \frac{6}{1+1} = 3 \Rightarrow (1,3)$$ *نقطةحرجـــــــــة*

$$f(-1) = \frac{-6}{1+1} = -3 \Rightarrow (-1, -3)$$ *نقطةحرجـــــــــة*

تعريف $(3-7-2)$:

لتكن f **دالة مستمرة على الفترة المغلقة** $[a,b]$ **ولتكن** $c\in[a,b]$ ، **يقال أن :**

١) $f(c)$ **تكون قيمة عظمى مطلقة (Absolute Maximum Value) لـ** f **في** $[a,b]$ **إذا كان :**

$$f(c)\ge f(x)\qquad \forall x\in[a,b]$$

٢) $f(c)$ **تكون قيمة صغرى مطلقة (Absolute Minimum Value) لـ** f **في** $[a,b]$ **إذا كان :**

$$f(c)\le f(x)\qquad \forall x\in[a,b]$$

ملاحظة : من التعريف السابق لإيجاد القيم المطلقة لدالة مستمرة على فترة مغلقة $[a,b]$ **يمكن ترتيب الحل كما يلي :**

١) **نجد النقط الحرجة ، ونختار منها من ينتمي للفترة المعطاة ولتكن عند** $x=c$ **توجد نقطة .**

٢) **نجد :** $f(a)\ ,\ f(b)\ ,\ f(c)$

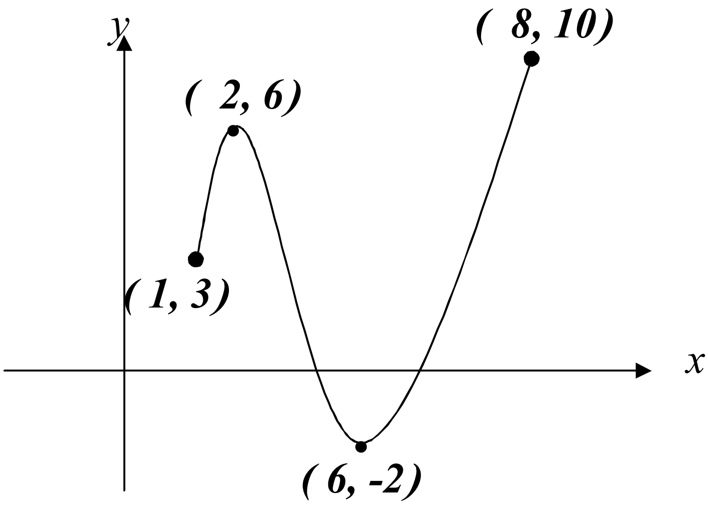
٣) **أكبر الأعداد السابقة = أعظم قيمة (قيمة عظمى مطلقة)**

٤) **أصغر الأعداد السابقة = أصغر قيمة (قيمة صغرى مطلقة) .**

في المخطط المجاور لاحظ أن:

10 = أعظم قيمة للدالة

-2 = أصغر قيمة للدالة



مثال ٢٨ : جد القيم القصوى المطلقة للدوال التالية :

$$1)\ f(x) = 3x - x^3 \qquad on \quad [-2, 0]$$

الحل:

$$f'(x) = 3 - 3x^2$$

$$when\ \ f'(x) = 0 \qquad \Rightarrow \quad 0 = 3(1 - x^2) \ \Rightarrow \ x = \pm 1$$ حرجتـــــــــان

$$f(x) = 3x - x^3$$

$$f(-1) = -3 + 1 = \boxed{-2}$$

$$f(-2) = -6 + 8 = \boxed{2}$$

$$f(0) = 0 - 0 = \boxed{0}$$

2 = أعظم قيمة للدالة f وتحدث عند $x = -2$

-2 = أصغر قيم للدالة f وتحدث عند $x = -1$ أي مدى الدالة = $[-2, 2]$

$$2)\ f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x \qquad on\ [-2, 4]$$

الحل:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$when\ f'(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 0 = 3(x^2 - 2x - 3) \Leftrightarrow 0 = 3(x-3)(x+1)$$

$$\Rightarrow \quad x = 3 \ \vee \ x = -1$$ **نقط حرجة**

نجد:

$$f(-1) = -1 - 3 + 9 = 5$$

$$f(3) = 27 - 27 - 27 = -27$$

$$f(4) = 64 - 48 - 36 = -20$$

$$f(-2) = -8 - 12 + 18 = -2$$

أكبر عدد = 5 = أعظم قيمة للدالة

أصغر عدد = -27 = أصغر قيمة للدالة أي مدى الدالة = $[-27, 5]$

$3)\, f(\theta) = \sin\ 2\theta \qquad on \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

الحل:

$$f'(\theta) = 2\cos 2\theta$$

$$0 = 2\cos 2\theta \quad \Rightarrow \quad \cos 2\theta = 0 \Rightarrow$$

$$2\theta = \frac{\pi}{2} \quad or \quad 2\theta = \frac{-\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4} \quad or \quad \theta = \frac{-\pi}{4}$$

$\therefore$ **النقط :** $\frac{\pi}{4}$, $\frac{-\pi}{4}$ **هي نقط حرجة**

لنجد الإحداثيات الصادية :

$$f(\frac{-\pi}{2}) = \sin(-\pi) = 0$$

$$f(\frac{\pi}{2}) = \sin(\pi) = 0$$

$$f(\frac{-\pi}{4}) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$$

$$f(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$$

أكبر عدد =1 = أعظم قيمة للدالة

أصغر عدد = -1 = أصغر قيمة للدالة **أي مدى الدالة =** $[-1, 1]$

$(4) \quad f(x) = |3 - x| \qquad on\ [-3, 5]$

الحل : العدد الحرج (3) والدالة غير قابلة للاشتقاق عنده $\quad 3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$

$f(-3) = 6$

$f(5) = 2$

$f(3) = 0$

أعظم قيمة للدالة = 6

أصغر قيمة للدالة = 0 **أي مدى الدالة =** $[0, 6]$

طريقة ثانية لحل السؤال الرابع :

$$(4) \quad f(x) = |3 - x| \qquad on \ [-3, 5]$$

$$x \in [-3, 5] \Leftrightarrow -3 \le x \le 5$$

$$\overset{\otimes(-1)}{\Leftrightarrow} 3 \ge -x \ge -5$$

$$\overset{\oplus(3)}{\Leftrightarrow} 6 \ge 3 - x \ge -2$$

$$\overset{|\ |}{\Leftrightarrow} 6 \ge |3 - x| \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 6 \ge f(x) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 6 \ge y \ge 0$$

$$The \quad Range = [0, 6]$$

6 = أكبر عدد في المدى = أعظم قيمة للدالة

0 = أصغر عدد في المدى = أصغر قيمة للدالة

$$(5) \quad f(x) = \sqrt[3]{(2 - x)^2} \qquad on \ [-6, 3]$$

الحل :

$$f(x) = (2 - x)^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(2 - x)^{-\frac{3}{3}}(-1)$$

$$= \frac{-2}{3\sqrt[3]{2 - x}} \neq 0$$

العدد (2) هو العدد الحرج الذي يجعل المقام مساويا للصفر أي الدالة غير قابلة للاشتقاق عندها

$$f(-6) = 4$$

$$f(3) = 1$$

$$f(2) = 0$$

أعظم قيمة للدالة =4

أصغر قيمة للدالة = 0 أي مدى الدالة = $[0, 4]$

طريقة ثانية لحل السؤال الخامس:

$$f(x)=\sqrt[3]{(2-x)^2} \qquad on\ [-6,3]$$

$$[-6,3] \Leftrightarrow -6 \le x \le 3$$
$$\Leftrightarrow 6 \ge -x \ge -3$$
$$\Leftrightarrow 8 \ge 2-x \ge -1$$
$$\Leftrightarrow 64 \ge (2-x)^2 \ge 0$$
$$\Leftrightarrow 4 \ge \sqrt[3]{(2-x)^2} \ge 0$$
$$\Leftrightarrow 4 \ge f(x) \ge 0$$

أي مدى الدالة = $[0,4]$

أعظم قيمة للدالة =4

أصغر قيمة للدالة = 0

$$(6) \quad f(x)=\frac{-8}{x^2+4} \qquad on\ [-2,4]$$

$$[-2,4] \Leftrightarrow -2 \le x \le 4 \Rightarrow 16 \ge x^2 \ge 0 \Rightarrow 20 \ge x^2+4 \ge 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{20} \le \frac{1}{x^2+4} \le \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{8}{20} \ge \frac{-8}{x^2+4} \ge -2 \Rightarrow -\frac{2}{5} \ge f(x) \ge -2$$

أي المدى = $\left[-2,-\frac{2}{5}\right]$

أي أكبر قيمة للدالة = $-\frac{2}{5}$ **وأصغر قيمة للدالة = -2**

تمرين (٣- ٥)

جد إن أمكن القيم القصوى المطلقة لكل من الدوال التالية :

1) $f(x)=8x-2x^2+3 \quad ; D(f)=[0,3]$

2) $f(x)=3x^2-x3+3 \quad ; D(f)=[-2,1]$

3) $f(x)=8x^2-x^4+3 \quad ; D(f)=[-1,3]$

4) $f(x)=\sin x-\cos x \quad ; D(f)=[0,\pi]$

5) $f(x)=8 \quad ; D(f)=[-2,3]$

6) $f(x)=\dfrac{6}{1+x^2} \quad ; D(f)=[-1,\sqrt{2}]$

7) $f(x)=\sqrt{25-x^2} \quad ; D(f)=[-3,4]$