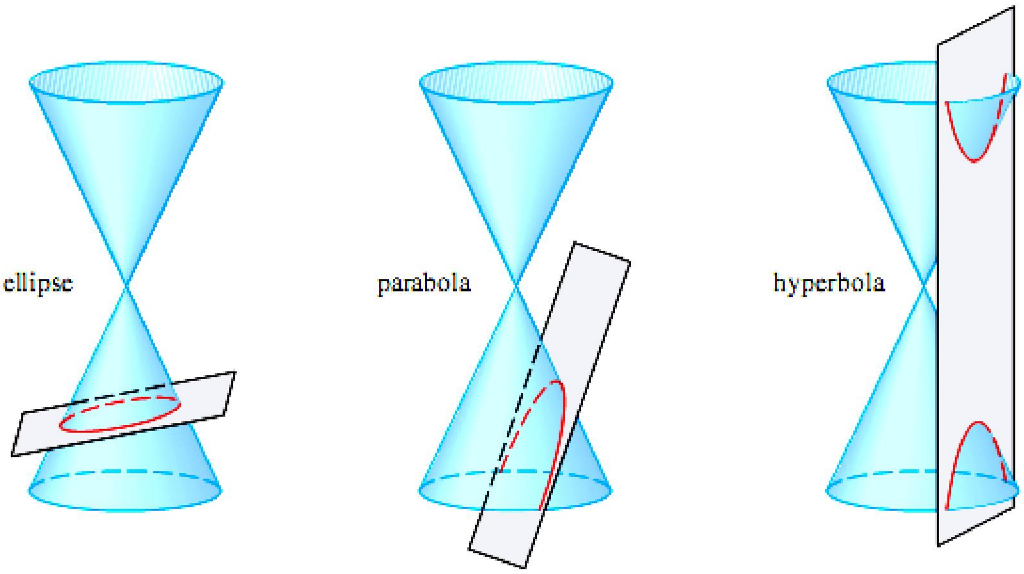
القطوع المخروطية

Conic Sections



KAMIL MOSA ALNASSIRY

للقطوع المخروطية تفسيرات هندسية أو جبرية أو تحليلية أو مساقط أو ....

القطع المخروطي هو مسار نقطة متحركة في المستوي تكون النسبة بين بعد هذه النقطة عن نقطة ثابتة الى بعد نفس النقطة عن مستقيم معلوم تكون نسبة معينة.

والنسبة الثابتة تدعى بالاختلاف المركزي ***eccentricity*** وبالاختصار تعطى الرمز *e* .

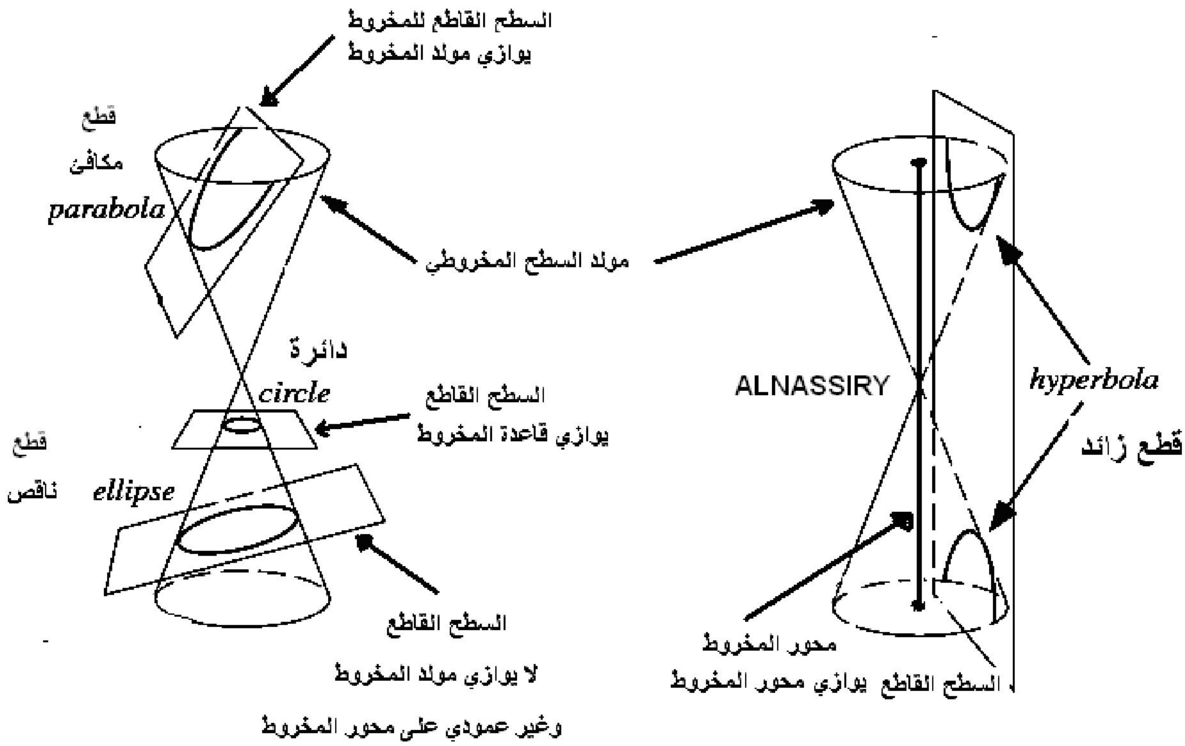
النقطة الثابتة تسمى بؤرة القطع المكافئ ***Focus of conic*** والمستقيم المعين يسمى الدليل ***directrix***

والقطوع المخروطية تصنف أربعة أصناف يمكن أن نتعرف على كل صنف من الاختلاف المركزي *e*

e	***Type*** النوع
0	***circle*** دائرة
$0< e <1$	***ellipse*** ناقص
1	***Parabola*** مكافئ
$e > 1$	***hyperbola*** زائد

بالنظر لهبوط مستوى الكتاب المدرسي وابتعاد المؤلفين عن مفردات المنهج المقرر ستكون الأسئلة التي عليها (*) للاطلاع

وفيما يلي أشكال القطوع الأربعة الناتجة من خط تقاطع مستوي لمخروطين لهما نفس الرأس ونفس المستقيم المولد للمخروط .



ويمكن استعمال المقدار المميز لمعرفة نوع القطع من المعادلة العامة للدرجة الثانية:

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

والمقدار المميز *the discriminant* هو $B^2 - 4AC$ ، يستعمل لمعرفة نوع القطع فإذا كان:

١) $B^2 - 4AC < 0$ المنحني قطعا ناقصا أو دائرة . (هذه النتائج غير دقيقة)

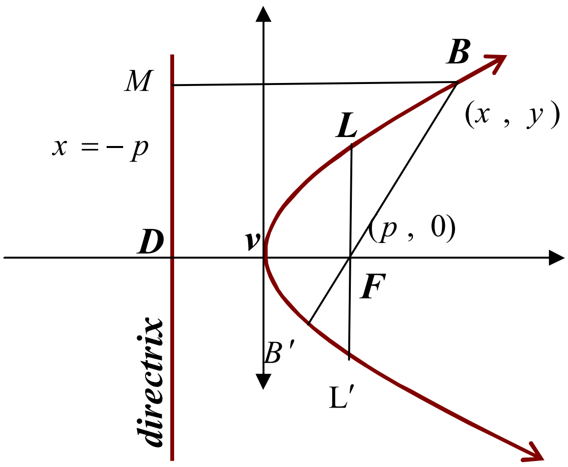
٢) $B^2 - 4AC = 0$ المنحني قطعا مكافئا .

٣) $B^2 - 4AC > 0$ المنحني قطعا زائدا.

(2.1) القطع المكافئ *(Parabola)* : هو مجموعة جميع النقط في المستوي التي على بعدين متساويين من نقطة ثابتة (تسمى البؤرة *focus*) ومن مستقيم ثابت في المستوي (الدليل *directrix*)

*** يدعى المستقيم المار بالبؤرة والعمود على الدليل بمحور القطع المكافئ *The axis of parabola***

وهو $\overleftrightarrow{DF}$ ونقطة المنتصف للقطعة $\overline{DF}$ تسمى الرأس *Vertex* ، وأي قطعة مستقيمة تصل نقطتين مختلفتين *(distinct points)* من نقط القطع المكافئ يسمى الوتر *Cord* وإذا مر هذا الوتر بالبؤرة بحيث يكون عموديا على محور القطع المكافئ سمي بالوتر البؤري *Latus rectum*.



V يسمى الرأس

F تسمى البؤرة

$\overline{BB'}$ تسمى بوتر القطع المكافئ

$\overline{LL'}$ يسمى بالوتر البؤري العمودي

$\overleftrightarrow{DF}$ يسمى محور القطع المكافئ وهو محور الانعكاس

فإذا فرضنا أن النقطة $B(x, y)$ هي نقطة افتراضية على القطع المكافئ

وأن $F(a, o)$ هي البؤرة فإن معادلة الدليل هي $x = -a$

نجد المسافة BF :

$$BF = \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} \ldots\ldots \quad (1)$$

نجد <u>المسافة الأفقية</u> BM

$$BM = \Delta x = |x - (-p)| = |x + p| \quad \ldots\ldots(2)$$

ومن تعريف القطع المكافئ فان :

$$BF = BM$$

$$\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2} = |x+p|$$

وبتربيع الطرفين نحصل على :

$$\cancel{x^2} - 2px + \cancel{p^2} + y^2 = \cancel{x^2} + 2px + \cancel{p^2} \Rightarrow \boxed{y^2 = 4px}$$

تمثل معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(p\,,\,0)$ ورأسه نقطة الأصل ومعادلة دليلة $x = -p$ وتكون فتحة القطع لليمين . وأن طول الوتر البؤري العمودي يساوي ($4p$) وحدة طول.

الرمز المستعمل للبؤرة هو p و يكون موجبا دائما. والبعض يستعمل الرمز a ويمكن أن يكون أي عدد حقيقي سالب أو موجب.

والمعادلة القياسية هي باربع حالات :

Equation	*Vertex* الرأس	Orientations	Focus	Directrix
$x^2 = +4py$	$(0,0)$	صادي للأعلى	$(0,p)$	$y = -p$
$x^2 = -4py$	$(0,0)$	صادي للأسفل	$(0,-p)$	$y = +p$
$y^2 = 4px$	$(0,0)$	سيني ولليمين	$(p,0)$	$x = -p$
$y^2 = -4px$	$(0,0)$	سيني لليسار	$(-p,0)$	$x = +p$

مثال : جد البؤرة ومعادلة الدليل وعين محور التماثل وأرسم القطوع المكافئة التالية :

١) $y^2 = -8x$

الحل : a) محور القطع هو محور السينات لأن المعادلة بصيغة $y^2 = -8x$

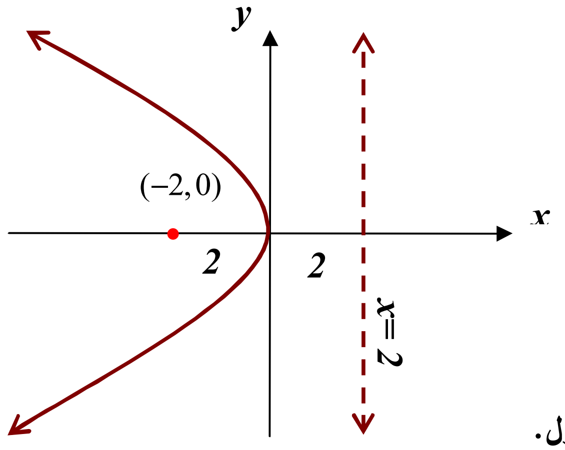
b) معامل x سالب فالفتحة لليسار .

c) بالمقارنة مع المعادلة $y^2 = \boxed{-4p}\,x$ نحصل على : $-8 = -4p \Leftarrow p = 2$

البؤرة $(-2,0)$ ومعادلة الدليل هي $x = 2$

d) نقط مساعدة (لا ضرورة لها ، لكن كتابنا للأسف تضمنها)

الفتحة لليسار $\Leftarrow$ المجال : $x \le 0$ فلنختار $x = -1$ $\quad y^2 = 8 \Rightarrow y = \mp\sqrt{8} \Rightarrow$



x	y
0	0
-1	$\mp\sqrt{8}$

$P = 2$ طول الوتر البؤري = $8 = 4p$ يعني المنحني

يمرمن $(-2, \pm 2p)$ أي يمر من $(-2, \pm 4)$ فلا حاجة للجدول.

٢) $2x^2 = 5y$ الحل: **a)** محور التماثل هو محور الصادات لأن المعادلة بصيغة $y = \frac{2}{5}x^2$

b) $x^2 = \frac{5}{2}y$: معامل y موجب فالفتحة للأعلى .

c) بالمقارنة مع المعادلة القياسية وكما يلي :

$$x^2 = \boxed{\frac{5}{2}}\, y$$

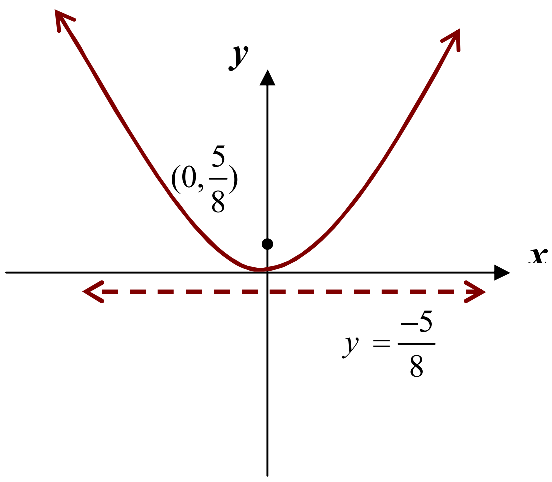
$$x^2 = \boxed{4p}\, y$$

$$4p = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{5}{8} \quad \Rightarrow focus \ \left(0, \frac{5}{8}\right) \qquad directrix : \ y = -\frac{5}{8}$$

d) نقط مساعدة

الفتحة للأعلى $\Leftarrow$ المدى : $y \ge 0$ فلنختار

$y = 2 \quad \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \mp\sqrt{5} \Leftarrow$



x	0	$\mp\sqrt{5}$
y	0	2

مثال : جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل والذي :

١) بؤرته $(-3,0)$

الحل : بؤرته $(-3,0)$ ورأسه $(0,0)$ $\Leftarrow$ محور القطع هو المشترك $y=0$ (محور السينات)

بؤرته $(-3,0)\equiv(-p,0) \Leftarrow p=3$

بؤرته $(-3,0)$ ورأسه $(0,0)$ وللیسار $\Leftarrow$ معادلته القياسية هي : $y^2=-4px \Leftarrow y^2=-12x$

٢) معادلة دليله $y=\frac{1}{2}$

الحل : من معادلة الدليل نستنتج أن : البؤرة هي $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ $\Leftarrow p=\frac{1}{2}$ وللأسفل

نستعمل المعادلة: $x^2=-4py \Leftarrow$ $x^2=-2y$ معادلة القطع المكفئ

٣) بؤرته على محورا لسينات ويمر من $(-1,8)$

الحل البؤرة تقع على محور السينات والرأس نقطة الأصل ويمر من النقطة $(-1,8)$

الشكل اما لليمين أو لليسار ومن النقطة المعطاة نستنتج أن فتحة القطع لليسار لذا تكون المعادلة :

$y^2=-4px$ يمر من النقطة $(-1,8)$ فتحقق المعادلة $y^2=-4px$

$64=-4p(-1) \Leftarrow p=16 \Leftarrow y^2=-4(16)x \Leftarrow y^2=-64x$ معادلة القطع

٤) يمر من النقطتين $(+2,10)$, $(-2,10)$

الحل : ارسم لتجد أن فتحة القطع للأعلى فتكون المعادلة هي $x^2=+4py$ وهذا المنحني يمر من

النقطتين $(\pm2,10)$ فتحققان المعادلة : $x^2=+4py \Leftarrow (\pm2)^2=+4p(10) \Leftarrow p=\frac{1}{10}$

$x^2=+4py \Leftarrow x^2=+4\left(\frac{1}{10}\right)y \Leftarrow x^2=\frac{2}{5}y$ معادلة القطع

٥) يقطع من المستقيم $x=2$ قطعة طولها ١٦ وحدة طول .

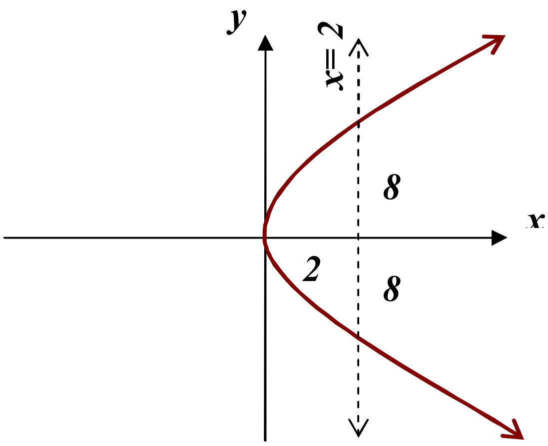
الحل : ١٦ = طول وتر ينصفه المحور السيني

$\frac{16}{2}=8$ فوق و تحت محور السينات

لذا فالمنحني سيمر من النقطتين $(2,\pm8)$

فتحققان المعادلة $y^2=+4px$

$(\pm8)^2=+4p(2) \Leftarrow p=8$



تعوض بالمعادلة $y^2 = +4px$

أي $y^2 = 4(8)x \Leftarrow y^2 = 32x$

مثال : القطع المكافئ $y^2 + 4ax - 16x = 0$ **رأسه نقطة الأصل ودليله يمر من النقطة *(-3,5)* جدقيم*a***

الحل : لأن المعادلة بصيغة $y^2 = \ldots$ **فهذا يعني أن محور القطع المكافئ هو محور السينات.**

ولأن النقطة المار بها الدليل يسار المحور الصادي فهذا يعني أن فتحة القطع لليمين.

لذا تكون معادلته : $y^2 = 4px$ **ومعادلة الدليل** $x = -p$.

لكن الدليل $x = -p$ **يمر من النقطة *(-3,5)* فتحقق معادلة الدليل .** $\Leftarrow -3 = -p \Leftarrow p = 3$

لذا تكون معادلة القطع المكافئ هي : $y^2 = 12x$ **لكن** $y^2 = 4(4-a)x$

$\Leftarrow 12 = 4(4-a) \Leftarrow a = 1$

مثال: جد معادلة القطع المكافئ المار من النقطة *(2,-8)* و رأسه نقطة الأصل وبؤرته $(0, \frac{2-a}{3})$ ،

ثم جد قيمة *a* .

الحل: من البؤرة المعطاة نستنتج أن البؤرة على محور الصادات ففتحته إما للأعلى أو للأسفل .

لكن النقطة *(2,-8)* المار منها القطع هي بالأسفل لذا تكون الفتحة للأسفل

معادلة القطع هي : $x^2 = -4py$ **لكنه يمر من النقطة *(2,-8)* فتحقق المعادلة .**

$$x^2 = -4py \Rightarrow (2)^2 = -4p(-8) \Rightarrow p = \frac{1}{8}$$

تكون المعادلة $x^2 = -4\left(\frac{1}{8}\right)y \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{2}y$

لكن البؤرة $(0, -p)$ **لأن الرسم للأسفل ، ∴ البؤرة** $\left(0, -\frac{1}{8}\right)$ **لكن البؤرة معطاة وهي** $(0, \frac{2-a}{3})$

ومن تعريف تساوي الأزواج المرتبة نحصل على $-\frac{1}{8} = \frac{2-a}{3} \Rightarrow a = \frac{19}{8}$

انسحاب القطوع المخروطية Shifting Conic Sections

اذا كان رأس القطع المكافئ هو (h , k) فللحصول على المعادلة نستبدل كل من x , y في المعادلات الاربعة بـــ $x-h , y-k$ على الترتيب فنحصل على المعادلات التالية :

Vertical Orientations	Vertical Orientations	Horizontal Orientations	Horizontal Orientations
الفتحة للأسفل	الفتحة للأعلى	الفتحة لليسار	الفتحة لليمين
$(x-h)^2=-4p(y-k)$	$(x-h)^2=4p(y-k)$	$(y-k)^2=-4p(x-h)$	$(y-k)^2=4p(x-h)$
Vertex (h,k) الرأس	Vertex (h,k) الرأس	Vertex (h,k) الرأس	Vertex (h,k) الرأس
Focus: البؤرة $(h , k-p)$	Focus: البؤرة $(h , k+p)$	Focus: البؤرة $(h-p, k)$	Focus: البؤرة $(h+p, k)$
Directrix: الدليل $y=k+p$	Directrix: الدليل $y=k-p$	Directrix: الدليل $x=h+p$	Directrix: الدليل $x=h-p$

والعلاقة التالية مهمة:

١) اذا كان محور القطع المكافئ أفقي فالاحداثي الصادي للبؤرة والرأس متساو = k

٢) اذا كان محور القطع المكافئ عمودي فالاحداثي السيني للبؤرة والرأس متساو = h

٣) الرأس بالمنتصف بين البؤرة والدليل لذا إذا كان مجهول أحد الثلاثة فنستعمل قانون المنتصف.

$$\boxed{x_v=\frac{x_1+x_2}{2} \quad , \quad y_v=\frac{y_1+y_2}{2}}$$

مثال: جد الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ الذي معادلته :

١) $(y-2)^2=8(3-x)$

الحل : تحول المعادلة للصيغة القياسية : $(y-2)^2=-8(x-3)$ $\Leftarrow$

١) الرأس $(3,2)=(h,k)$ ٢) محور التماثل $y=2$ يوازي محور السينات ٣) فتحة المنحني لليسار

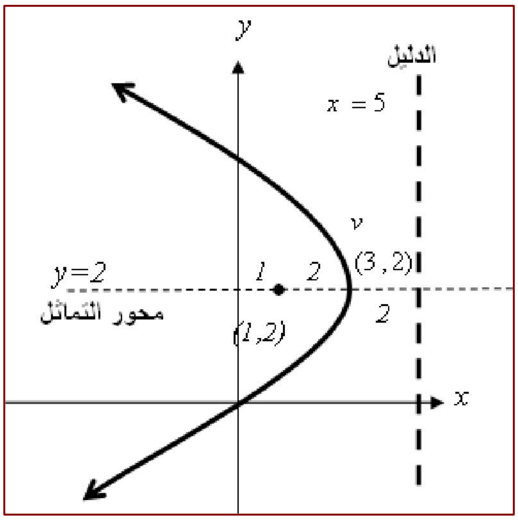
٤) تقارن المعادلة مع المعادلة القياسية فنحصل على : $-4p=-8 \Leftarrow p=2$ = مقدار السحب لليسار

٥) البؤرة نحصل عليها بسحب الرأس لليسار بمقدار ٢ وحدة $\Leftarrow$ الرأس $(3,2) \xrightarrow{shifted\ (-2)} (h-p,k)$

KAMIL MOSA ALNASSIRY

البؤرة $(3-2,2) \Rightarrow F(1,2)$

٦) (الدليل : $F(h-p,k) \Rightarrow D: x = h+p \Rightarrow x = 3+2 \Rightarrow \boxed{x=5}$



٢) $x^2 + 8y - 12x + 52 = 0$

الحل تحول للصيغة القياسية وكما يلي: $x^2 - 12x = -52 - 8y$

(نصف معامل x) يربع ويضاف للطرفين : $\left(\frac{1}{2}(-12)\right)^2 = 36$ أي *36* تضاف لطرفي المعادلة

$$x^2 - 12x + 36 = -52 - 8y + 36 \overset{+36}{\Rightarrow} x^2 - 12x = -16 - 8y$$

$$(x-6)^2 = -16 - 8y$$

معامل y يجب أن يكون موجبا ويساوي واحد : $(x-6)^2 = -8(y+2)$ صيغة قياسية

الرأس: $x = 6 \Leftarrow x - 6 = 0$; $y = -2 \Leftarrow y + 2 = 0 \Leftarrow$

الرأس $V(h,k) \Rightarrow V(6, -2)$

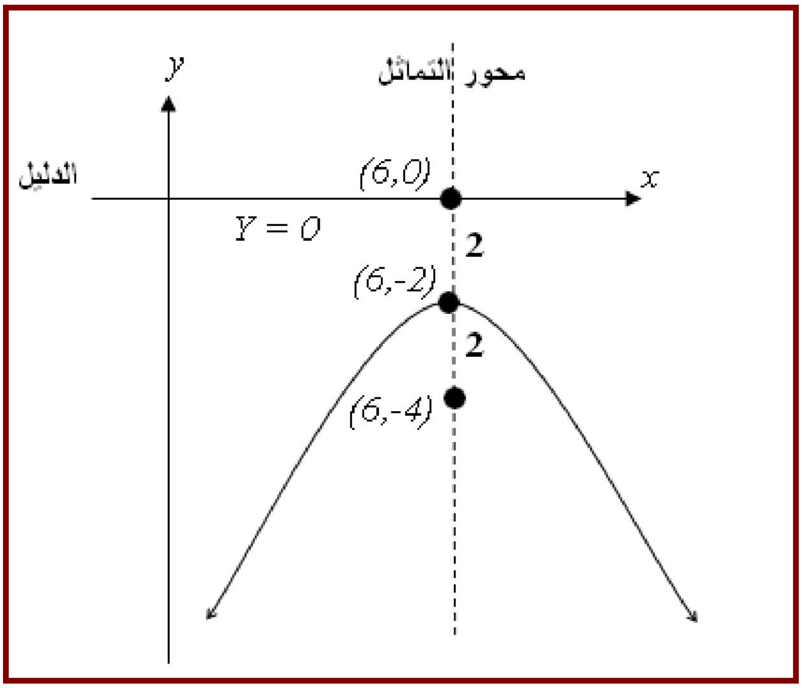
ومن السالب بالمعادلة نستنتج أن فتحة المنحني للأسفل، أي الرأس يسحب للأسفل نحصل على البؤرة .

-4p = -8 $\Leftarrow$ ***p = 2*** وهي مقدار الإزاحة :

البؤرة $V(h,k) = V(6, -2) \Rightarrow F(h, k-p) \Rightarrow F(6, -2-2) \Rightarrow F(6,-4)$

الدليل : $F(h, k-p) \Rightarrow D: y = k+p \Rightarrow D: y = -2+2 \Rightarrow D: \boxed{y=0}$

KAMIL MOSA ALNASSIRY



مثال : جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته تقع على أحد محوري الاحداثيين والذي دليله يمر من النقطة $(-3\,,6)$.

الحل : الدليل يمر من نقطة فتحقق معادلة الدليل : فالدليل إما $y = 6$ أو الدليل $x = -3$

الأول : الدليل $y = 6$ يوازي x من الأعلى فتكون فتحة القطع للأسفل وتكون $p = 6$

والمعادلة هي $x^2 = -4py \quad \Leftarrow \quad x^2 = -24y$

الثاني: الدليل $x = -3$ يوازي y من اليسار فتكون فتحة القطع لليمين لذا فإن $p = 3$

والمعادلة هي $y^2 = 4px \quad \Leftarrow \quad y^2 = 12x$

Exercises (2 -1)

س١: جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل والذي :

(١) بؤرته $(0,-8)$ (٢) بؤرته $(h,0)$ (٣) معادلة دليله $y=-5$

(٤) معادلة دليله $2x-3=0$ ٥) يمر من النقطة $(1,-4)$ وبؤرته على السينات .

(٦) يمر من النقطة $(1,-4)$ وبؤرته على الصادات ٧) يمر من النقطتين $(2,8),(2,-8)$

(٨) يمر من النقطتين $(-1,-6),(1,-6)$

(٩) يمر دليله من النقطة $(-4,8)$ وبؤرته من نقط محور السينات

(١٠) يمر دليله من النقطة $(-4,8)$ وبؤرته من نقط محور الصادات .

(١١) يقطع من المستقيم $x=4$ قطعة طولها ١٦ وحـــدة طول .

(١٢) يقطع من دليل القطع المكافئ $x^2+12y=0$ قطعة طولها ١٢ وحدة .

س٢: ارسم القطوع المكافئة التالية مؤشراً البؤرة ومعادلة الدليل :

1) $x=2y^2$; 2) $4y+x^2=0$; 3) $4x^2+y=0$;

4) $y^2=12x$; 5) $(x+2)^2=12(y-3)$; 6) $x-1=(y+5)^2$;

7) $y^2+2y+12x+25=0$; 8) $y+12x-2x^2=0$

س٣: مستخدماً التعريف جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل والذي :

(١) بؤرته $(0,-3)$ (٢) معادلة دليله $2x-3=0$

(٣) بؤرته من نقط محور السينات ويمر من النقطة $(-1,6)$.

س٤: القطع المكافئ $x^2=ky-6y$ ، معادلة دليله $y=8$ ، جد قيمة k .

س٥: إذا كانت المعادلة $(k+2)y^2+(k+1)x^2=18x-kx$ هي معادلة قطع مكافئ يمر من نقطة الأصل وبؤرته على أحد محوري الاحداثيين ، جد قيمة k وجد البؤرة ومعادلة الدليل .

ج : $k=-2, f(-5,0)\ , D: x=5$

س٦: جد نقطة أو نقاط تنتمي للمنحني $y^2-4x=0$ بحيث تبعد عن بؤرته بمقدار ١٠ وحدة طول.

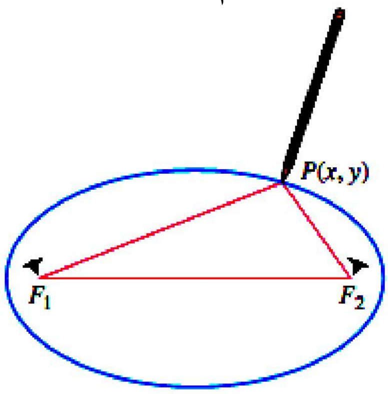
ج: (٩ ، ٦ ±)

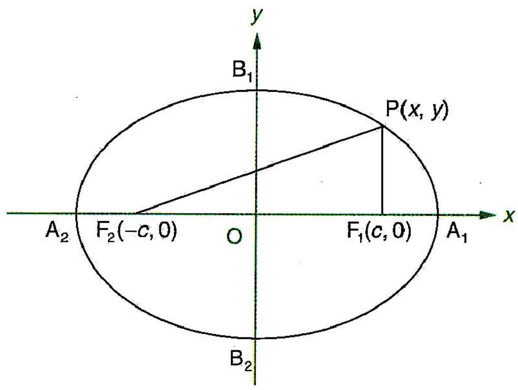
Ellipses

القطوع الناقصة

هو مجموعة النقط في المستوي التي يكون مجموع بعدي أية نقطة منها $P(x , y)$ عن نقطتين ثابتتين $F_1(c, 0)$, $F_2(c, 0)$ تسميان بالبؤرتين يساوي عددا ثابتا $(2a)$.

لاحظ الشكل المجاور يمثل إحدى طرق رسم القطع الناقص التي يستعمل فيها خيط طوله ثابت $2a$ مثبت بطرفيه بمسمارين يمثلان البؤرتين ومن حركة القلم و بشد الخيط نحصل على القطع الناقص





اشتقاق المعادلة القياسية من التعريف :

$$PF_1+PF_2=2a \quad \text{و أن} \quad 0<a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a \quad \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$(x-c)^2+\cancel{y^2}=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y}+(x+c)^2+y^2$$

$$\cancel{4}a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\cancel{4}cx+\cancel{4}a^2$$

$$a^2(x^2+2xc+c^2+y^2)=c^2x^2+2a^2cx+a^4$$

$$a^2x^2+\cancel{2a^2cx}+a^2c^2+a^2y^2=c^2x^2+\cancel{2a^2cx}+a^4$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \qquad Let\ \ b^2=a^2-c^2$$

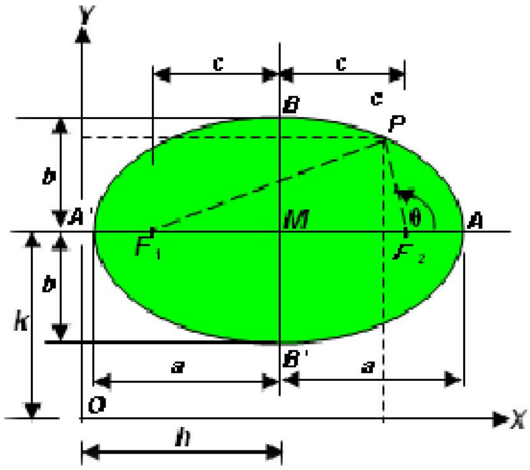
$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \qquad \div a^2b^2 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2}\oplus\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{Standard equation of an ellipse}}$$

تمثل معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات .

KAMIL MOSA ALNASSIRY

ويمكن وضع المعلومات العامة للقطع الناقص وكما يلي :

Notation ملاحظات



A', A: vertices الرأسان ; $(\pm a, 0)$

d', d: directrices الدليلان; $x \pm \frac{a}{e} = 0$

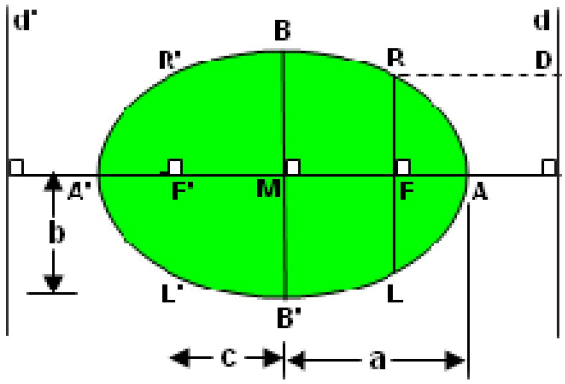
F = focus البؤرة ; $(\pm c, 0)$

A'A = 2a = major axis المحور الأكبر

$PF_1 + PF_2 = 2a$; M = center المركز

B'B = 2b = minor axis المحور الأصغر

$F_1F_2 = 2c$ = المسافة بين البؤرتين



المسافة بين المركز والبؤرة = $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Eccentricity الاختلاف المركزي

$(e = \frac{c}{a}) < 1$

الوتر البؤري العمودي

المسافة بين المركز وأي من الدليلين = $\frac{a}{e}$

$$\text{Area} = a\,b\,\pi$$

p* = *محيط القطع الناقص

$$p \approx 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

المعادلة العامة:عندما محوري القطع يوازيان محوري الإحداثيين

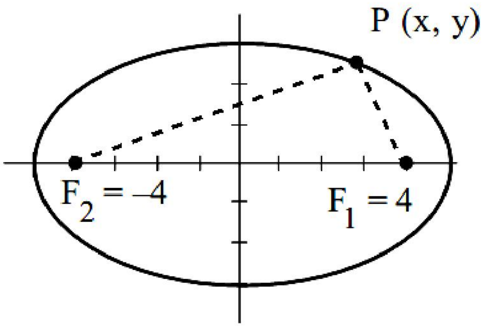
$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \;; \quad AC > 0$$

(*) طول الوتر البؤري العمودي = $\frac{2b^2}{a}$

١) المركز نقطة الأصل	
المحور الأكبر أفقي	المحور الأكبر شاقولي
المعادلة : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ الرأسان *Vertices* $(\pm a, 0)$ البؤرتان *Foci* $(\pm c, 0)$ التقاطع مع الصادات y-*intercepts* $(0, \pm b)$	المعادلة : $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ الرأسان $(0, \pm a)$ *Vertices* البؤرتان *Foci* $(0, \pm c)$ التقاطع مع السينات x-*intercept* $(\pm b, 0)$

٢) المركز (h , k)	
المحور الأكبر أفقي *Major Axis Horizontal*	المحور الأكبر شاقولي *Major Axis Vertical*
$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ الرأسان *Vertices* $(h \pm a, k)$ البؤرتان $(h \pm c, k)$ *Foci*	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ الرأسان *Vertices* $(h, k \pm a)$ البؤرتان *Foci* $(h, k \pm c)$

مثال : مستخدما تعريف القطع الناقص ، جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه *(4,0) , (-4,0)* اذا علمت أن العدد الثابت يساوي ١٠ وحدة طول .



ellipse: $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 10$

الحل : لتكن *P(X,Y)* من نقط المنحنى .

$PF_1 =$ البعد بين $p(x, y)$ والبؤرة الأولى $(4,0)$

$$PF_1 = \sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2}$$

$PF_2 =$ المسافة بين $p(x, y)$ والبؤرة الثانية $(-4,0)$

$$PF_2=\sqrt{(x+4)^2+(y-0)^2}$$

التعريف : مجموع بعدي أية نقطة تقع عليه عن بؤرتيه = العدد الثابت

$$PF_1+PF_2=\sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+4)^2+(y-0)^2}=10$$

١) نبقي أحد الجذرين في جهة ... ٢) نربع الطرفين ......٣) نبسط ونقسم الطرفين على (٤) دائما

٤) نبقي الجذر المتبقي مرة أخرى لوحده في جهة .... ٥) نربع الطرفين. ....

$$1)\quad \sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2}=10-\sqrt{(x+4)^2+(y-0)^2}$$

$$2)\quad \left(\sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2}\right)^2=\left(10-\sqrt{(x+4)^2+(y-0)^2}\right)^2$$

$$3)\quad \cancel{x^2}-8x+\cancel{16}+\cancel{y^2}=100-20\sqrt{x^2+8x+16+y^2}+\cancel{x^2}+8x+\cancel{16}+\cancel{y^2}$$

$$4)\quad 20\sqrt{x^2+8x+16+y^2}=100+16x\overset{\div 4}{\Rightarrow}5\sqrt{x^2+8x+16+y^2}=25+4x$$

$$5)\quad \left(5\sqrt{x^2+8x+16+y^2}\right)^2=(25+4x)^2$$

$$25(x^2+8x+16+y^2)=(25+4x)^2\Rightarrow 25x^2+\cancel{200x}+400+25y^2=625+\cancel{200x}+16x^2$$

$$9x^2+25y^2=225\overset{\div(225)}{\Rightarrow}\boxed{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1}$$

مثال : ارسم القطوع الناقصة التالية مع ذكر كافة خصائصه :

نحول المعادلة للصيغة القياسية بقسمة طرفيها على $576Q1:\ 9x^2+16y^2=576$

$$\frac{9x^2}{576}+\frac{16y^2}{576}=1\Rightarrow\frac{x^2}{\frac{576}{9}}+\frac{y^2}{\frac{576}{16}}=1\Rightarrow\underbrace{\boxed{\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1}}_{\text{قياسية}}$$

المركز ***(0,0)*** **والعدد الأكبر هو** ***64*** **تحت** x^2 **لذا الرأسين والبؤرتين على محور السينات .**

الرأسان $a^2=64:\quad a=8\quad\Rightarrow V_1(8,0),\ V_2(-8,0)$

طرفي المحور الأصغر(القطبان) وهما نقطتا تقاطع المنحني مع الصادات

$$b^2=36:\quad b=6\Rightarrow(0,6),(0,-6)$$

$$a^2=b^2+c^2\quad\Rightarrow\quad 64=36+c^2\quad\Rightarrow c=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$$

البؤرتان $F_1(2\sqrt{7},0)\ ,\ F_2(-2\sqrt{7},0)$

طول المحور الأكبر : $2a = 16\ u\text{int}$

طول المحور الأصغر : $2b = 12\ u\text{int}$

المسافة بين البؤرتين : $2c = 4\sqrt{7}\ u\text{int}$

طول الوتر البؤري العمودي(للاطلاع) :

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{72}{8} = 9$$

لاحظ من الوتر البؤري العمودي يمكن معرفة أربع نقط على القطع الناقص هي

$$\left(2\sqrt{7}, \pm\frac{9}{2}\right)\ ,\ \left(-2\sqrt{7}, \pm\frac{9}{2}\right)$$

الاختلاف المركزي : $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{7}}{8} = \frac{\sqrt{7}}{4} < 1$

معادلتي الدليلين $x = ...$ لأن البؤرتين على السينات :

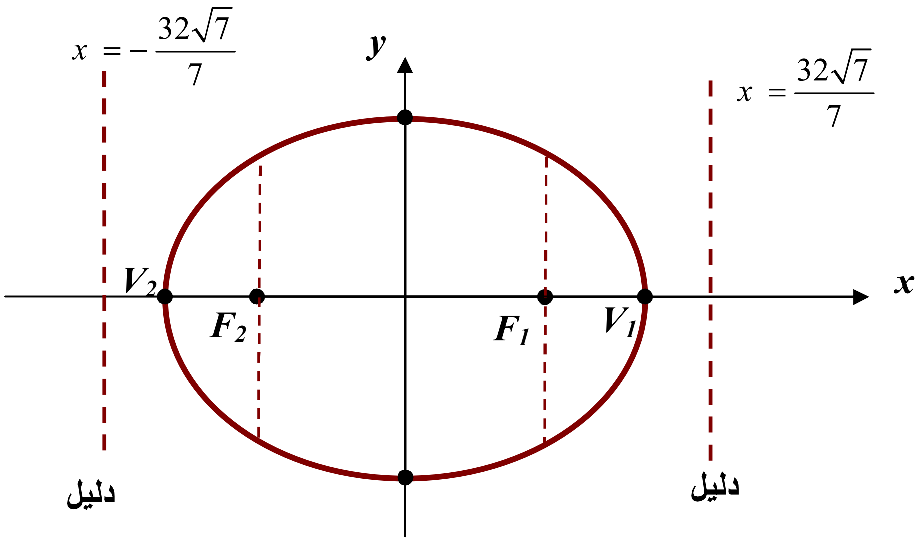
للاطلاع $x = \pm\frac{a}{e} \Rightarrow x = \pm\frac{a^2}{c} \Rightarrow x = \pm\frac{64}{2\sqrt{7}}$

مساحة منطقة القطع الناقص :

$$A = a\,b\,\pi = 48\pi\ (unit)^2$$

محيط القطع الناقص :

$$p \approx 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{64+36}{2}} = 2\pi\sqrt{50} = 10\pi\sqrt{2}\ unit$$



$Q2:\ 25x^2+9y^2=9$

نحول المعادلة للصيغة القياسية بقسمة طرفيها على ٩

$$\frac{25x^2}{9}+\frac{9y^2}{9}=1 \quad \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{\frac{9}{25}}+\frac{y^2}{1}=1}$$

قياسية

العدد الأكبر هو *1* تحت y^2 لذا فالمركز *(0,0)* والرأسين والبؤرتين على محور الصادات .

الرأسان $a^2=1:\quad a=1 \quad \Rightarrow V_1(0,1),\ V_2(0,-1)$

طرفي المحور الأصغر(القطبان) وهما نقطتا تقاطع المنحني مع x ,

$$b^2=\frac{9}{25}:\ b=\frac{3}{5}\Rightarrow (\frac{3}{5},0),(-\frac{3}{5},0)$$

$$a^2=b^2+c^2 \quad \Rightarrow \frac{25}{25}=\frac{9}{25}+c^2 \quad \Rightarrow c^2=\frac{16}{25}\Rightarrow c=\frac{4}{5}$$

البؤرتان $F_1(0,\frac{4}{5})\ ,F_2(0,-\frac{4}{5})$

طول المحور الأكبر : $2a=2\quad unit$

طول المحور الأصغر : $2b=\frac{6}{5}\quad unit$

المسافة بين البؤرتين : $2c=\frac{8}{5}\quad unit$

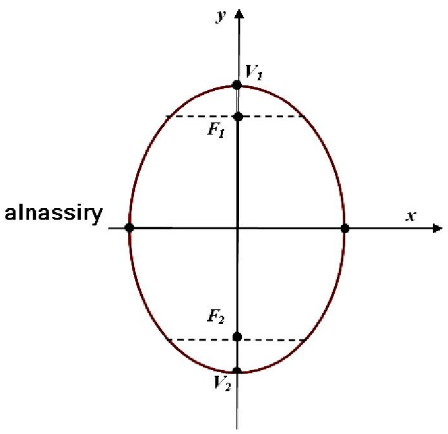
الاختلاف المركزي : $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}<1$

مساحة منطقة القطع الناقص :

$$A=ab\pi=\frac{3}{5}\pi\,(unit)^2$$

محيط القطع الناقص :

$$p\approx 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=2\pi\sqrt{\frac{1+\frac{9}{25}}{2}}=2\pi\frac{\sqrt{17}}{5}\quad unit$$



KAMIL MOSA ALNASSIRY

$Q\,3: \quad \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$

الحل : المعادلة هي بالوضع القياسي وهو قطع صادي :

١) المركز : $x-2=0 \Rightarrow x = \boxed{2=h}$; $y+3=0 \Rightarrow y = \boxed{-3=k}$

لذا يكون المركز : $C\ (2,-3)$

٢) معادلة المحور ألأكبر هي $x = 2 = h$ ، ومعادلة المحور الأصغر هي $y = -3 = k$

٣) الرأسان : $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow$ الرأسان هما : $\Leftarrow (2, k \pm a)\ \ (2, -3 \pm 5)$

لذا الرأسان : $V_1(2,2)\ ,\ V_2(2,-8)$

٤) طرفي المحور الأصغر : $b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$

$\Leftarrow$ النقطتان $(2 \pm b\ ,-3) \Leftarrow$ القطبان $(6,-3)\ ,\ (-2,-3)$

٥) البؤرتان : $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 16 + c^2 \Rightarrow c = 3$ أي أن مقدار إزاحة الرأس اعلي وأسفل هو ٣ وحدات . أي البؤرتان $(h, k \pm c) \Leftarrow (2,-3 \pm c) \Leftarrow$ البؤرتان $(2,-3 \pm 3) \Leftarrow$ البؤرتان

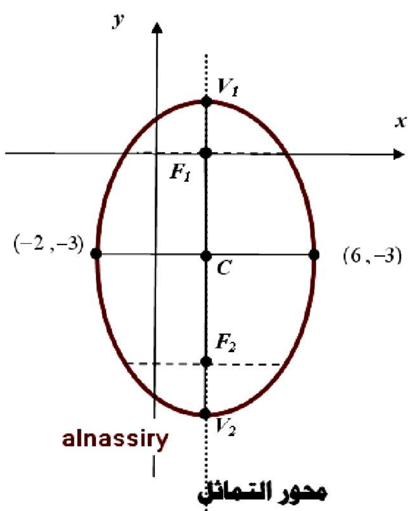
$F_1(2,0)\ ,\ F_2(2,-6)$

٦) طول محور أكبر = $2a$ = 10 وحدة طول ، ٧) طول محور أصغر = $2\,b$ = 8 وحدة طول

٨) المسافة بين البؤرتين = $2\,c$ = 6 وحدة طول ٩) الاختلاف المركزي = $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$

١٠) مساحة منطقة القطع الناقص = $A = ab\pi = 20\pi \ \ u^2$

١١) محيط القطع الناقص = $p \approx 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{25+16}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{41}{2}}\ \ unit$



KAMIL MOSA ALNASSIRY

$E4: \quad x^2+4y^2+4x-8y+4=0$

الحل : نستعمل طريقة إكمال المربع لكل من المتغيرين :

$$x^2+4x+\ ?\ +4\left(y^2-2y+??\right)=-4+?+??\cdot 4$$

تم ترتيب الحدود : بعد ذلك نجعل كلا من معاملات $x^2\ ,\ y^2$ الواحد الصحيح وذك بإيجاد عامل مشترك

(نصف معامل x) يربع : ثم يضاف للطرفين . كذلك الحال بالنسبة لـــ y

$$x^2+4x+\boxed{4}+4(y^2-2y+\underline{1})=-4+\boxed{4}+\underline{4(1)} \Rightarrow$$

$$(x+2)^2+4(y-1)^2=4 \quad \overset{\div(4)}{\Rightarrow} \quad \frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{1}=1$$

الحل : المعادلة هي بالوضع القياسي لقطع ناقص سيني :

١) المركز ومعادلتي المحورين : وهي معادلة المحور الأصغر

$$x+2=0 \Rightarrow x=\boxed{-2=h}$$

وهي معادلة المحور الأكبر $\quad y-1=0 \Rightarrow y=\boxed{1=k}$

لذا يكون المركز : $C\ (-2,1)$

٣) الرأسان : $a^2=4 \Leftarrow a=2 \Leftarrow$ الرأسان هما : $(h\pm a,k) \Leftarrow\Leftarrow (-2\pm 2,1)$

لذا الرأسان : $V_1(-4,1)\ ,\ V_2(0,1)$

٤) طرفي المحور الأصغر–القطبان : $b^2=1 \Rightarrow b=1 \Leftarrow$ النقطتان $(h,k\pm b) \Leftarrow (-2\ ,1\pm b) \Leftarrow$

$$(-2,0)\,,(-2,2) \Leftarrow$$

٥) البؤرتان : $\Rightarrow c=\sqrt{3} \quad a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 4=1+c^2$ أي أن مقدار إزاحة الرأس يمين و

يسار هو $\sqrt{3}$ وحدات . أي البؤرتان $(h\pm c,k) \Leftarrow (-2\pm c\ ,1) \Leftarrow$ البؤرتان $(-2\pm\sqrt{3}\ ,1)$

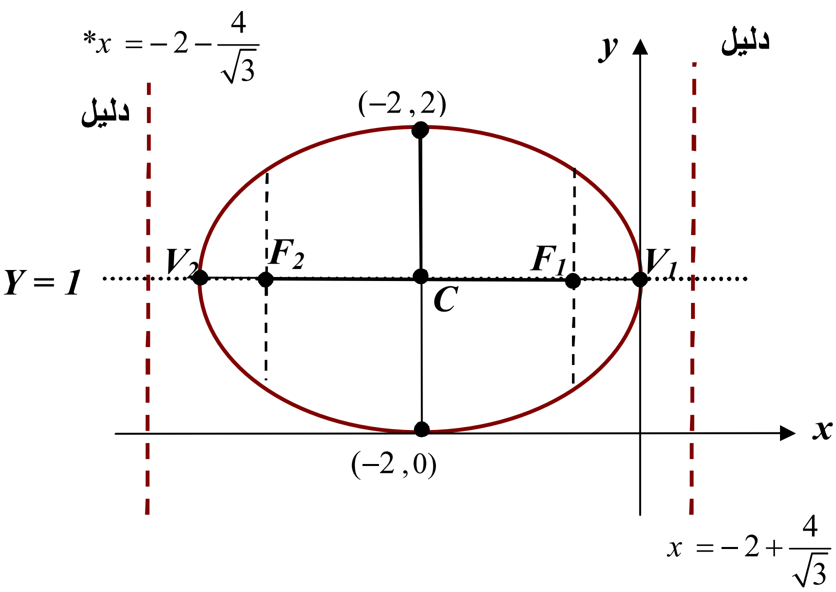
$\Leftarrow$ البؤرتان $F_1(-2+\sqrt{3}\ ,1)\ ,\ F_2(-2-\sqrt{3}\ ,1)$

٦) طول محور أكبر = $2a$ = 4 وحدة طول ٧) طول محور أصغر = $2b$ = ٢ وحدة طول

٨) المسافة بين البؤرتين = $2c$ = $2\sqrt{3}$ وحدة طول ٩) الاختلاف المركزي = $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

١٠) مساحة منطقة القطع الناقص = $A=ab\pi=2\pi\ \ u^2$

١١) محيط القطع الناقص = $p\approx 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=2\pi\sqrt{\frac{4+1}{2}}=2\pi\sqrt{\frac{5}{2}}\ \ unit$



ملاحظات تفيد في المساعدة بحل أسئلة جد معادلة القطع الناقص

الذي مركزه **نقطة الأصل** ومحوريه منطبقين على محوري الاحداثيين والذي :

أفضل وسيلة للفهم هي الرسم

١) بؤرتاه $(0,\pm 6)$ $\Leftarrow$ $c = 6$ وعلى الصادات

٢) رأساه $(0,\pm 6)$ $\Leftarrow$ $a = 6$ وعلى الصادات

٣) يمر من $(0,\pm 6)$ $\Leftarrow$ $a = 6 \;\; or \;\; b = 6$ التحديد يتوقف على باقي معلومات السؤال .

٤) بؤرتاه $(0,\pm 6)$ ويمر من $(\pm 10,0)$ $\Leftarrow$ $6 = c$ وعلى الصادات لكن a , c تقعان على نفس المحور بينما b فعلى المحور المعاكس $\Leftarrow$ $10 = b$

٥) بؤرتاه $(0,\pm 6)$ ويمر من $(0,\pm 10)$ $\Leftarrow$ $6 = c$ وعلى الصادات لكن a , c تقعان على نفس المحور بينما b فعلى المحور المعاكس $\Leftarrow$ $10 = a$

٦) المسافة بين بؤرتيه تساوي 12 وحدة طول ويمر من $(0,\pm 6)$ $\Leftarrow$ $2c = 12 \Leftarrow c = 6$

لكنه يمر من $(0,\pm 6)$ $\Leftarrow$ 6 للنقطة تعني إما $a = 6$ أو $b = 6$ والآن يجب تحديد أحدهما

من مبرهنة فيثاغورس $a > c$ $\Leftarrow$ قيمة a أكبر من الـــ 6 لذا فان $a \neq 6$

$\therefore$ $b = 6$ وعلى الصادات $\therefore$ a , c على السينات .

٧) يمس المستقيم $y = -8$ $\Leftarrow$

٨) مداه = $[-8, 8]$ ، مجاله = $[-6, 6]$ $\Leftarrow$

المدى = مجموعة قيم y يعني أن القطع يقطع من الصادات في النقطتين $(0,\pm 8)$ ،

المجال = مجموعة قيم x وهذا يعني أن القطع يقطع السينات في النقطتين $(\pm 6,0)$

أصبح القطع يمر بالنقط $(0,\pm 8)\,(\pm 6,0) \Rightarrow b=6 \;,\; a=8$

٩) النسبة بين طولي محوريه كنسبة $2:5 \Rightarrow b=\frac{2}{5}a \Leftarrow \frac{2b}{2a}=\frac{2}{5}$

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي يحقق كلا مما يلي :

$Q1$: بؤرتاه $(0,6)\,,(0,-6)$ وأن العدد الثابت يساوي 20 .

الحل : من البؤرتين نستنتج أن : ١) المركز نقطة الأصل ٢) القطع صادي ٣) $c=6$

العدد الثابت = $20=2a \Rightarrow a=10$ ومن تطبيق مبرهنة فيثاغورس نحصل على b

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 100=b^2+36 \Rightarrow b=8$$

المعادلة المطلوبة $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1 \Leftarrow \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

$Q2$: مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2=-24x$ ويمر من النقطتين $(0,\pm 10)$

الحل : $y^2=-24x$ القطع المكافئ لليسار ، $-4p=-24 \Rightarrow p=6 \Rightarrow$ بؤرة المكافئ $(-6,0)$

بؤرتا الناقص $(\pm 6,0) \Rightarrow c=6$ وعلى السينات $\Leftarrow$ الرأسان على السينات أيضا

يمر من $(0,\pm 10) \Rightarrow b=10$ لأنها على المحور المعاكس للبؤرة

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow a^2=10^2+6^2=136$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{136}+\frac{y^2}{100}=1$$

$Q3$: مركزه نقطة الأصل وأحد رأسيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2=-40y$ وطول محوره الأصغر يزيد على المسافة بين بؤرتيه بمقدار 4 وحدات .

الحل : $x^2=-40y$ من هذه المعادلة نستنتج أن محور القطع هو محور الصادات وأن $-4p=-40$

$p=10 \Rightarrow$ بؤرة القطع المكافئ هي $(0,-10) \Rightarrow$ رأسا القطع الناقص هما $(0,\pm 10)$

$a=10$ وعلى الصادات .

المعطى الثاني : $2b-2c=4 \overset{\div(2)}{\Rightarrow} b-c=2 \Rightarrow b=\boxed{c+2}$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 100 = (c+2)^2 + c^2 \Rightarrow 100 = c^2 + 4c + 4 + c^2 \Rightarrow$$
$$2c^2 + 4c - 96 = 0 \Rightarrow c^2 + 2c - 48 = 0 \Rightarrow (c+8)(c-6)$$

إما **$c = -8$** غير ممكن لأن a, b, c أعداد موجبة .

أو $c = 6 \Leftarrow b = 6 + 2 = 8$ المعادلة هي $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$

Q4 : بؤرتاه $(\pm\sqrt{6}, 0)$ ويمر من بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x + 2y - 11 = 0$ ثم جد معادلة مماس القطع الناقص في بؤرة القطع المكافئ.

الحل : بؤرتاه $(\pm\sqrt{6}, 0) \Leftarrow c = \sqrt{6}$ وعلى السينات

لنجد بؤرة القطع المكافئ فنحول المعادلة للصيغة القياسية أولا :

$$y^2 - 12x + 2y - 11 = 0 \Rightarrow y^2 + 2y + ? = 12x + 11 + ?$$
$$y^2 + 2y + 1 = 12x + 11 + 1 \Rightarrow (y+1)^2 = 12(x+1) \Rightarrow V(-1, -1)$$
$$12 = 4p \Rightarrow p = 3 \Rightarrow F(-1+3, -1) \Rightarrow F(2, -1)$$

لكن القطع الناقص يمر من بؤرة القطع المكافئ : $F(2, -1)$ فتحقق معادلة الناقص : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \overset{\times(a^2b^2)}{\Rightarrow} 4b^2 + a^2 + = a^2b^2 \quad ......(1)$$

$$But : a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + 6 \quad ....(2)$$

تعوض المعادلة (٢) في المعادلة (١) :

$$a^2 + 4b^2 = a^2b^2 \overset{a^2 = b^2 + 6}{\Rightarrow} 4b^2 + b^2 + 6 = b^2(b^2 + 6) \Rightarrow 5b^2 + 6 = b^4 + 6b^2 \Rightarrow$$
$$b^4 + b^2 - 6 = 0 \Rightarrow (b^2 \oplus 3)(b^2 - 2) = 0 \Rightarrow b^2 = 2 \Rightarrow a^2 = 8$$

معادلة القطع الناقص هي : $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$

إيجاد معادلة المماس : نضرب طرفي المعادلة في 8 $\Leftarrow x^2 + 4y^2 = 8$ نشتق الطرفين بالنسبة للمتغير x

$$2x + 8y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y}$$

ميل المماس $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{at\ (2,-1)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

معادلة المماس $m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y+1}{x-2} \Rightarrow x - 2y - 4 = 0$

$Q5$: بؤرتاه $(\pm 8\,.\,0)$ واختلافه المركزي يساوي $\frac{4}{5}$.

الحل : من البؤرتين $c=8$ وعلى السينات

$$e=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{4}{5}=\frac{8}{a} \Rightarrow a=10$$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 100=b^2+64 \Rightarrow b^2=36 \quad the\ equation: \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$$

$Q6$: بؤرتاه $(\pm 8\,.\,0)$ والنسبة بين طولي محوريه كنسبة $\frac{3}{5}$.

الحل : من البؤرتين $c=8$ وعلى السينات

النسبة بين طولي محوريه كنسبة $\frac{3}{5}$ $\Leftarrow$ $\frac{2b}{2a}=\frac{3}{5}$ $\Leftarrow$ $b=\frac{3}{5}a$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow \frac{25}{25}a^2=\frac{9}{25}a^2+64 \Rightarrow \frac{16}{25}a^2=64 \Rightarrow \frac{4}{5}a=8$$

$$a=10 \Rightarrow b=6 \Rightarrow \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$$

$Q7$: إحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2=-24x$ ويمر من $(\pm 10,0)$ ومركزه نقطة الأصل.

الحل : $-4p=-24$ $\Leftarrow$ $p=6$ والقطع المكافئ فتحته لليسار $\Leftarrow$ بؤرة القطع المكافئ هي $(-6,0)$

$\therefore$ بؤرتا القطع الناقص هما $(\pm 6,0)$ $\Leftarrow$ $c=6$ على السينات

الناقص يمر من $(\pm 10,0)$ $\Leftarrow$ $a=10$ على السينات لأن البؤرتين والرأسين على نفس المحور

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 100=b^2+36 \Rightarrow b^2=64 \Rightarrow \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1 \quad the\ equation$$

$Q8$: إحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2=-24y$ ويمر من $(\pm 10,0)$ومركزه نقطة الأصل

الحل : $-4p=-24$ $\Leftarrow$ $p=6$ والقطع المكافئ فتحته للأسفل $\Leftarrow$ بؤرة القطع المكافئ هي $(0,-6)$

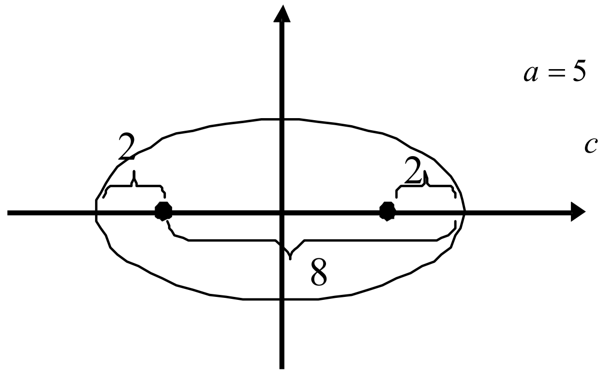
$\therefore$ بؤرتا القطع الناقص هما $(0,\pm 6)$ $\Leftarrow$ $c=6$ على الصادات

الناقص يمر من $(\pm 10,0)$ $\Leftarrow$ $b=10$ لأنها على المحور المعاكس للبؤرتين .

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow a^2=100+36 \Rightarrow a^2=136 \Rightarrow \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{136}=1 \quad the\ equation$$

:Q9 بؤرتاه على محور السينات وإحدى البؤرتين تبعد عن الرأسين بالبعدين *2* ، *8* وحدة طول ومركزه نقطة الأصل.

الحل : الرسم يوضح الفكرة .



مجموع البعدين = ٨ + ٢ = ١٠ ⇐ $2a=10$ ⇐ $a=5$

فرق البعدين = ٨ − ٢ = ٦ ⇐ $2c=6$ ⇐ $c=3$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 25=b^2+9 \Rightarrow b^2=16$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \quad \textit{the equation}$$

Q10 : بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين $x^2=24y$, $x^2=-24y$ ومساحة منطقته 80π وحدة مربعة

الحل: $4p=24$ ⇐ $p=6$ البعد البؤري وعلى الصادات ⇐ بؤرتا المكافئين $(0,\pm 6)$ وهما بؤرتي القطع الناقص ⇐ $c=6$ على الصادات .

$$A=ab\pi \Rightarrow 80\pi=ab\pi \Rightarrow b=\frac{80}{a}$$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow a^2=\frac{6400}{a^2}+36 \overset{\otimes a2}{\Rightarrow} a^4=6400+36a^2 \Rightarrow a^4-36a^2-6400=0$$

$$(a^2-100)(a^2\oplus 64)=0 \Rightarrow a^2=100 \Rightarrow a=10 \Rightarrow b=\frac{80}{10}=8 \Rightarrow \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1 \quad \textit{the equation}$$

Q11 : طول نصف محوره الأصغر = ٥ وعلى السينات ، واختلافه المركزي = $\frac{\sqrt{11}}{6}$ ومركزه نقطة الأصل.

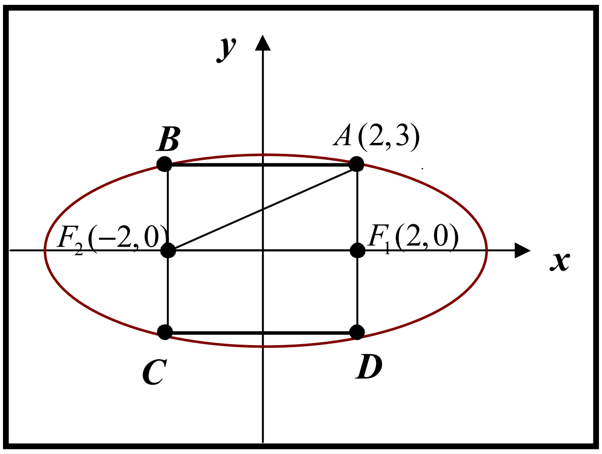
الحل: $b=5$ وعلى السينات ⇐ a , c على الصادات

$$e=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{\sqrt{11}}{6}=\frac{c}{a} \Rightarrow c=\frac{\sqrt{11}}{6}a$$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow \frac{36}{36}a^2=25+\frac{11}{36}a^2 \Rightarrow \frac{25}{36}a^2=25 \Rightarrow a^2=36$$

$$a^2=36 \Rightarrow a=6 \quad \textit{but} \ b=5 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1 \qquad \textit{the equation of the ellipse}$$

Q12 : بؤرتاه $F_1(2,0)$, $F_2(-2,0)$ وأن F_1 منتصف $\overline{AD}$ وأن F_2 منتصف $\overline{CB}$ وأن محيط المستطيل $ABCD$ يساوي *20* وحدة طول .



الحل : $c=2$ وعلى السينات

المسافة بين البؤرتين = $2c$ = 4 وحدة طول

لذا فان : AB = 4 أيضا

المحيط = (طول + عرض)×٢

$(AB+AD)\,2=20$

$4+AD=10$

$AD=6$

$AF_1=3$ بالتنصيف ويمثل

إحداثي صادي للنقطة A لذا فان الرأس $A(2,3)$

للحل المتبقي من السؤال ثلاث طرق:

الطريقة الأولى نستخدم التعريف : $AF_1=3$

$$AF_2=\sqrt{(2+2)^2+(3-0)^2}=5$$

التعريف :

$$AF_1+AF_2=2a \quad\Rightarrow\quad 3+5=2a \quad\Rightarrow\quad a=4$$

$$a^2=b^2+c^2 \quad\Rightarrow\quad 16=b^2+4 \quad\Rightarrow\quad b^2=12$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1 \quad \text{The equation}$$

الطريقة الثانية : النقطة $(2,3)$ تحقق معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\frac{2^2}{a^2}+\frac{3^2}{b^2}=1 \quad\xRightarrow{\otimes a^2b^2}\quad 4b^2+9a^2=a^2b^2 \;.........(1)$$

لكن :

$$a^2=b^2+c^2 \quad\Rightarrow\quad a^2=\boxed{b^2+4} \;..........(2)$$

من حل المعادلتين آنيا نحصل على a^2,b^2 أكمل الحل .

الطريقة الثالثة: طول الوتر البؤري العمودي AD = 6 لكن طول الوتر البؤري العمودي = $\frac{2b^2}{a}$

منهما نحصل على $\frac{2b^2}{a}=6 \quad\Leftarrow\quad b^2=3a \;...(1)$

$$a^2=b^2+c^2 \quad\Rightarrow\quad a^2=3a+4 \quad\Rightarrow\quad a^2-3a-4=0 \quad\Rightarrow\quad (a-4)(a\oplus 1)=0 \quad a=4 \Rightarrow b^2=12$$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1 \qquad \text{the equation of ellipse}$$

Q13 : يمر من النقطتين $(3,\frac{\sqrt{6}}{2})$, $(-2,2)$ وبؤرتاه من نقط محور السينات ومركزه نقطة الأصل .

الحل : ١) $(-2,2)$ تحقق المعادلة $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\Leftarrow$ $\frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \quad ....(1)$

٢) $(3,\frac{\sqrt{6}}{2})$ تحقق المعادلة $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\Leftarrow$ $\frac{9}{a^2}+\frac{6}{4b^2}=1 \quad ....(2)$

من اجل الحل آنيا نضرب طرفي المعادلة الأولى في ٩ وطرفي المعادلة الثانية في (*- 4*) :

$$\cancel{\frac{36}{a^2}}+\frac{36}{b^2}=9 \quad ....(1)$$

$$\cancel{\frac{-36}{a^2}}+\frac{-6}{b^2}=-4 \quad ....(2)$$

$\frac{30}{b^2}=5 \Rightarrow b^2=6$ **نعوض في المعادلة الاولى :**

$$\frac{4}{a^2}+\frac{4}{6}=1 \Rightarrow \frac{4}{a^2}=\frac{2}{6} \Rightarrow a^2=12 \Rightarrow \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1 \quad \textit{the equation}$$

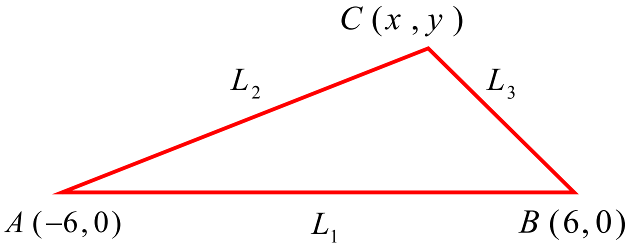
أمثلة أخرى:

Q1: **لتكن** $A(-6,0)$ **ولتكن** $B(6,0)$ **ولتكن** ***C(x , y)*** **نقطة متحركة في المستوي بحيث أن محيط المثلث *ABC* يساوي *32* وحدة طول ، ماذا تمثل مجموعة نقط *C* .**

الحل:

المحيط = $L_1+L_2+L_3$

$12+L_2+L_3 = 32$



$L_2+L_3 = 20$ **الناتج يمثل تعريف القطع الناقص حيث العدد الثابت = *20* والنقطتين *A ,B* تمثل البؤرتين .**

المركز : $(0,0)$

$2a = 20 \Rightarrow a=10$ ، $AB=12 \Rightarrow 2c=12 =6$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 100=b^2+36 \Rightarrow b^2=64 \Rightarrow \textit{the equation} : \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$$

Q2 : لتكن $x=6\cos\theta$, $y=10\sin\theta$ ، **جد المجموعة التي تمثلها المجموعة** $y=f(x)$

الحل :

$$\cos\theta=\frac{x}{6} \Rightarrow \cos^2\theta=\frac{x^2}{36}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{10} \Rightarrow \sin^2\theta=\frac{y^2}{100}$$

$$but:\ \sin^2\theta+\cos^2=1 \Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{100}+\frac{x^2}{36}=1}$$

ملاحظة : معطيات السؤال هي معادلة القطع الناقص بالصيغة البارامترية وبعد الحل أوجدنا معادلة القطع الناقص بالصيغة الكارتيزية.

حيث تمثل معادلة قطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور الصادات.

Q3 : القطع الناقص $4x^2+w\,y^2=8$ **بؤرتاه** $\left(0,\pm\sqrt{6}\right)$ **جد قيمة** w .

الحل : البؤرتان $\left(0,\pm\sqrt{6}\right)$ ، **نحصل على** $c=\sqrt{6}$ **وعلى الصادات**

في المعادلة مجهول واحد لذا نحولها للصيغة القياسية بقسمة طرفيها على 8

$$4x^2+w\,y^2=8 \Rightarrow \frac{x^2}{2}+\frac{w}{8}y^2=1 \Rightarrow \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{\frac{8}{w}}=1$$

البؤرتان على الصادات لذا فان a^2 **تكون موجودة تحت** y^2 أي $a^2=\frac{8}{w} \Leftarrow b^2=2$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow \frac{8}{w}=2+6 \Rightarrow w=1$$

Q4 : القطع الناقص $hx^2+k\,y^2=32$ **بؤرتاه على محور** y **والمسافة بينهما تساوي المسافة بين بؤرة القطع المكافئ** $y^2+4\sqrt{6}\,x=0$ ، **ودليله ومجموع مربعي طولي محوريه يساوي 40 جد قيمة** m , n .

الحل : $y^2=-4\sqrt{6}\,x$ **قطع مكافئ فتحته لليسار** ، $4p=4\sqrt{6} \Rightarrow p=\sqrt{6}$ = **البعد البؤري**

المسافة بين بؤرة أي مكافئ ودليله تساوي $2p$

المسافة بين بؤرة المكافئ المعطى ودليله تساوي $2\sqrt{6}$ أي $2c=2\sqrt{6} \Rightarrow \boxed{c=\sqrt{6}}$

ومجموع مربعي طولي محوريه يساوي 40 : $(2a)^2+(2b)^2=40 \Rightarrow a^2+b^2=10 \quad ......(1)$

لكن $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow$ $a^2=b^2+6 \quad ....(2)$ **تعوض في المعادلة الأولى فنحصل على :**

$$\boxed{a^2}+b^2=10 \Rightarrow \boxed{b^2+6}+b^2=10 \Rightarrow 2b^2=4 \Rightarrow b^2=2 \Rightarrow a^2=8$$

فتكون المعادلة :

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}=1 \overset{\otimes 32}{\Rightarrow} 16x^2+4y^2=32$$

But $\qquad hx^2+ky^2=32$

Hence : $h=16$, $k=4$

Q5 : القطع الناقص : $hx^2+4y^2=k$ **مجاله =** $[-6,6]$ ، **ومداه =** $[-9,9]$

جد قيمة $h,k,$ **الحقيقية**

الحل : المجال يمثل مجموعة قيم x **فالقطع الناقص يمر من** $(\pm 6,0)$

المدى يمثل مجموعة قيم y **فالقطع الناقص يمر من** $(0,\pm 9)$

$a=9$ **لأنه الأكبر وعلى الصادات**

$b=6$ **على السينات**

معادلة القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{81}=1 \overset{\otimes 81\times 4}{\Rightarrow} \qquad \boxed{9}x^2+4y^2=\boxed{324}$$

But $\qquad$ *we have the equation* : $\boxed{h}x^2+4y^2=\boxed{k}$

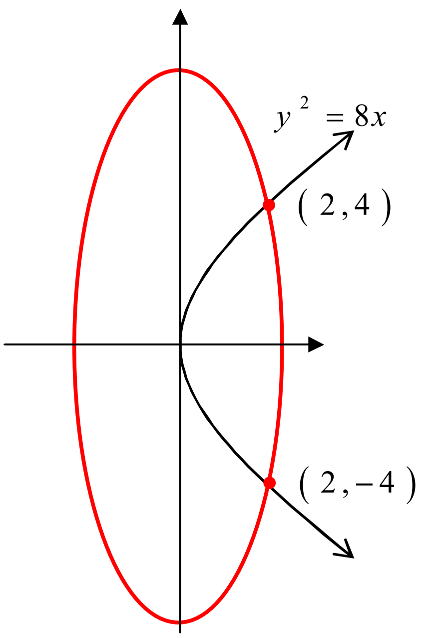
Then $h=9$; $k=324$

Q5 : قطع ناقص صادي مركزه نقطة الأصل والنسبة بين طولي محوريه كنسبة $\frac{1}{2}$ **ويقطع القطع المكافئ** $y^2=8x$ **عند** $x=2$ **جد معادلته بالصيغة العامة.**

الحل: $\frac{2b}{2a}=\frac{1}{2} \Rightarrow a=2b \Rightarrow \boxed{a^2=4b^2}$

لكن $y^2=8x$ $\quad x=2 \Leftarrow y^2=8(2) \Leftarrow y=\pm 4$ **نقط التقاطع هي** $(2,\pm 4)$

نقط التقاطع تقع عى القطع الناقص فتحقق معادلته:



$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \Rightarrow \frac{4}{b^2}+\frac{16}{4b^2}=1 \Rightarrow \frac{4}{b^2}+\frac{4}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow \frac{8}{b^2}=1 \Rightarrow b^2=8 \Rightarrow a^2=4(8)=32$$

لذا تكون الصيغة القياسية هي : $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{32}=1$

ومن ضرب طرفي المعادلة في ٣٢ نحصل على:

$4x^2+y^2-32=0$ **وهي معادلة القطع الناقص بالصيغة العامة**

تدريب (٢ – ٢)

القطوع الناقصة في الأسئلة التالية مركزها نقطة الأصل ومحوريها منطبقين على محوري الاحداثيين .

س١) لتكن a **هي بؤرة القطع المكافئ** $x^2 + 24y = 0$

لتكن b **هي بؤرة القطع المكافئ** $y^2 - 32x = 0$

أ) جد معادلة القطع الناقص الذي يمر من a , b

ب) جد معادلة القطع الناقص الذي أحدى بؤرتيه هي a **ويمر من** b **.**

ج) جد معادلة القطع الناقص الذي أحدى بؤرتيه هي a إذا علمت بأن النسبة بين طولي محوريه كنسبة $\frac{5}{4}$

د) جد معادلة القطع الناقص الذي أحدى بؤرتيه هي b ويقطع الصادات عند $y = \pm 10$

هــ) جد معادلة القطع الناقص الذي أحدى بؤرتيه هي b ويقطع السينات عند $x = \pm 10$

و)جد معادلة القطع الناقص السيني والذي طول محوره الأصغر يساوي المسافة بين بؤرة المكافئ الاول

ودليلة اذا علمت بان اختلافه المركزي يساوي 0.8

س٢) جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 = 8x$ **والمار من النقطة** $(-2, 3)$

س٣) جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 24x = 0$ **ويمر من نقطتي تقاطع المنحني** $x^2 + y^2 + 16y - 64 = 0$ **مع محور السينات .**

س٤) جد معادلة القطع الناقص الصادي الذي المسافة بين بؤرتيه تساوي 16 **وحدة وطول محوره الأكبر يساوي** 3 **أمثال طول محوره الأصغر.**

س٥) جد معادلة القطع الناقص الذي محوريه منطبقين على محوري الاحداثيين ومركزه نقطة الأصل والذي يقطع من محور السينات قطعة طولها 12 **وحدة ومن محور الصادات قطعة طولها** 20 **وحدة**

س٦) جد معادلة القطع الناقص الذي أحد رأسيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 40x = 0$ **إذا علمت بأن النسبة بين المسافة بين بؤرتيه الى طول محوره الأصغر كنسبة** $\frac{4}{3}$

س٧) جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه من نقط محور الصادات والمار من النقطتين $(\sqrt{2}, -2), (2, 0)$

س٨) $a\,b\,c$ **مثلث حيث** $a(0,4)\,;\,b(0,-4)$ **وأن** a , b **هما بؤرتان لقطع ناقص** c **من نقطه فإذا كان محيط المثلث** 20 **وحدة طول فجد معادلة القطع الناقص**

كامل موسى الناصري

س٩) القطع الناقص $8x^2 + 2y^2 = k$ **المسافة بين بؤرتيه تساوي المسافة بين بؤرة القطع المكافئ** $y^2 = 4\sqrt{6}x$ **ودليله ، جد قيمة** k .

س١٠) القطع الناقص $9x^2 + k^2 y^2 = 9k^2$ **إحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ :** $\frac{1}{4}y^2 + 4x = 0$ **، جد قيمة** k .

س١١) جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه من نقط محور الصادات والمسافة بين بؤرتيه تساوي المسافة بين بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 24x = 0$ **ودليله ، و كانت مساحة منطقة القطع الناقص تساوي** 80π **وحدة مربعة.**

س١٢) جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2 + 24y = 0$ **والذي يقطع من دليل القطع المكافئ نفسه قطعة طولها** *10* **وحدات .**

س١٣) ***m , n*** **بؤرتان لقطع ناقص على محوره الأكبر على محور الصادات** ***p*** **من نقطه ، و ليكن** ***p d*** **يمثل ارتفاع المثلث** $p\,m\,n$ **حيث** $p\,m = p\,n$ **، وليكن محيط هذا المثلث يساوي** ***36*** **وحدة طول فإذا كان :** $p\,d = \frac{3}{8}m\,n$ **، فجد معادلة هذا القطع .**

س١٤) جد مساحة منطقة القطع الناقص الذي بؤرتاه من نقط محور الصادات والذي يقطع القطع المكافئ $x^2 + 8y = 0$ **، في نقطتين أحدثيهما الصادي يساوي (2−) وإن النسبة بين طولي محوري القطع الناقص كنسبة** *1/2*

س١٥) جد معادلة القطع الناقص الصادي المار من النقطتين $(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}), (1, -2)$

س١٦ : جد معادلة القطع الناقص السيني الذي يمر من النقطتين $(0, \pm 8)$ **والذي اختلافه المركزي** 0.6

س١٧ : جد معادلة القطع الناقص الذي يمر من بؤرة القطع المكافئ $x^2 + 24y = 0$ **ومساحة منطقته** $60 unit^2$

س١٨ : جد معادلة القطع الناقص الصادي والذي الفرق بين طولي محوريه يساوي *8* **وحدة طول ومساحة منطقته تساوي** $60\pi\, unit^2$.

س١٩ :القطع الناقص $8x^2 + 2y^2 = k$ **مجموع مربعي طولي محوريه يساوي** *40* **جد قيمة** k .

كامل موسى الناصري

س20: جد معادلة القطع الناقص الصادي الذي يمر من نقط تقاطع الدائرة $x^2+y^2=100$ مع محور الصادات وطول محوره الأصغر يساوي طول الوتر الذي يصنعه دليل القطع المكافئ $y^2+24x=0$ مع نفس الدائرة.

س21:جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $\left(\pm 2\sqrt{6}, -1\right)$ وطول محوره الكبير يزيد على طول محوره الصغير بمقدار *4* وحدة طول.

س22: قطع ناقص صادي معادلته $hx^2+6y^2=k$ إحدى بؤرتيه تبعد عن الرأسين بالبعدين $2,12$ جدي قيمة $h\,,\,k$

س23: جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحوريه منطبقين على محوري الاحداثيين والذي يمر من النقطتين $(4,2),(1,3)$

س24: حدد عناصر القطع التالي وارسمه:

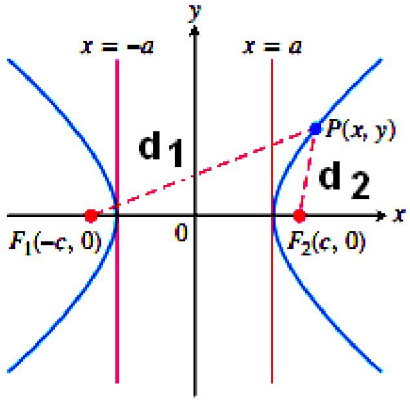
$$(1)\;\; 9x^2+25y^2+18x-100y-116=0 \qquad (b)\;\; 9x^2+25y^2=9$$

الحل موجود على الموقع : www.alnasiry.com

كامل موسى الناصري

القطع الزائد *Hyperbola*

تعريف : القطع الزائد هو مجموعة جميع النقط في المستوي التي فرق مسافتيها عن نقطتين ثابتتين في المستوي تسميان بالبؤرتين *Foci* يكون مقدارا ثابتا موجبا.



البؤرتان هما : $F_1(-c,0)\ and\ \ F_2(c,0)$

وليكن الفرق الثابت الموجب = 2 a

ولتكن النقطة الواقعة على القطع الزائد هي : $P(x,y)$

التعريف : $\left|PF_1 - PF_2\right| = 2a \Rightarrow \left|\ \mathbf{d_1} - \mathbf{d_2}\right| = \mathbf{2a}$

يسمى $d_1\ ,\ d_2$ **بنصفي القطرين البؤريين**

$$d_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \qquad ; \qquad d_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

بسط $\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a$

تخلص من القيمة المطلقة : $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$

حول أحد الجذرين التربيعيين للجهة الأخرى :

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

بتربيع الطرفين $\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a\right)^2$

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$$

اطرح y^2 **من الطرفين وافتح تربيع متعدد الحدود** ***Subtract y^2 and square the binomials***

$$\cancel{x^2} + 2xc + \cancel{c^2} = \cancel{x^2} - 2xc + \cancel{c^2} \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$$

تحل المعادلة بجعل الجذر التربيعي لوحده في أحد طرفي المعادلة : $4xc - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

يقسم طرفي المعادلة على *4* : $xc - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

نربع الطرفين للتخلص من الجذر التربيعي : $\left(xc - a^2\right)^2 = \left(\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$

افتح تربيع ذو الحدين وبسط المعادلة : $x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2\left(x^2 - 2xc + c^2 + y^2\right)$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2x^2 - 2xca^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$x^2c^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

اجعل *x's and y's* على نفس الجهة : $x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$

حلل : $x^2\left(c^2 - a^2\right) - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right)$

قسم طرفي المعادلة على $a^2(c^2 - a^2)$ فنحصل على :

$$\frac{x^2(c^2-a^2)}{a^2(c^2-a^2)} - \frac{a^2y^2}{a^2(c^2-a^2)} = \frac{a^2(c^2-a^2)}{a^2(c^2-a^2)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(c^2-a^2)} = 1$$ ولنفترض : $b^2 = c^2 - a^2$

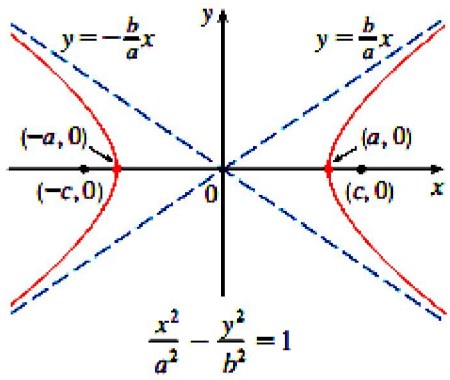
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ حيث أن $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$

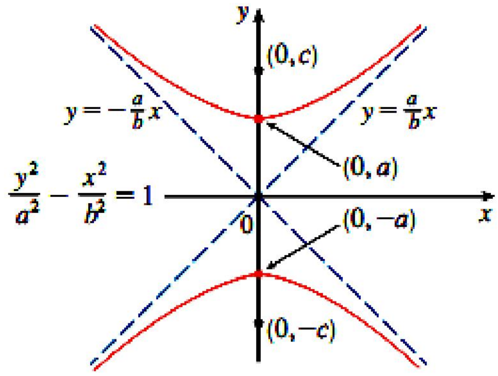
تمثل الصيغة القياسية لمعادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل والذي

1) بؤرتاه **Foci** $(\pm c, 0)$ ٢) رأساه **Vertices** $(\pm a, 0)$

٣*) ومعادلتي المحاذيين **Asymptotes** هما $y = \pm\frac{b}{a}x$ ٤) الدليلين **directrices** : $x = \pm\frac{a}{e}$ للإطلاع

ومن استبدال كل x بـــ y وبالعكس نحصل على معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه على محور الصادات ومركزه نقطة الأصل. لاحظ الشكلين أدناه .





- طول المحور الأساسي (الحقيقي) = $2a$
- طول المحور المرافق(التخيلي) = $2b$
- المسافة بين البؤرتين = $2c$
- $\boxed{a^2 + b^2 = c^2} \Rightarrow c > a \;, c > b$
- معادلتي المحاذيين للاطلاع : $y = \pm\frac{b}{a}x$ اذا كان القطع سيني

  أو $y = \pm\frac{a}{b}x$ أذا كان القطع صادي
- بعد المركز عن الدليل العمود على المحور الأساسي يساوي $\frac{a^2}{c}$ للإطلاع

كامل موسى الناصري

لذا تكون معادلتي الدليلين : $x = \pm \frac{a^2}{c}$ إذا كان المحور البؤري على السينات أو تساوي $y = \pm \frac{a^2}{c}$

إذا كان المحور الأساسي على الصادات .

- طول الوتر البؤري العمودي *Length of latus rectum* $\frac{2b^2}{a}$ للإطلاع

وملخص القطع الزائد كما يلي : الحالة الأولى – المركز نقطة الأصل

المحور الأساسي عمودي Major Axis Vertical	المحور الأساسي أفقي Major Axis Horizontal
Equation: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ المعادلة	***Equation:*** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ المعادلة
Center: $(0, 0)$ المركز	***Center:*** $(0, 0)$ المركز
Vertices: $(0, \pm a)$ الرأسان	***Vertices:*** $(\pm a, 0)$ الرأسان
Foci: $(0, \pm c)$ البؤرتان	***Foci:*** $(\pm c, 0)$ البؤرتان
Asymptotes (المقاربان) المحاذيان $y = \pm \frac{a}{b} x$	**Asymptotes (المقاربان) المحاذيان** $y = \pm \frac{b}{a} x$
الدليلين *Directrices* : $y = \pm \frac{a}{e}$	**الدليلين *Directrices* :** $x = \pm \frac{a}{e}$

٢) المركز (h, k) *Shifted* القطع الزائد المنسحب (المزاح) أفقيا أو عموديا

المحور الأساسي عمودي Major Axis Vertical	المحور الأساسي أفقي Major Axis Horizontal
$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ المعادلة	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ المعادلة
Center: (h, k) المركز	***Center:*** (h, k) المركز
Vertices: $(h, k \pm a)$ الرأسان	***Vertices:*** $(h \pm a, k)$ الرأسان
Foci: $(h, k \pm c)$ البؤرتان	***Foci:*** $(h \pm c, k)$ البؤرتان
(المقاربان) المحاذيان **Asymptotes** $y = k \pm \frac{a}{b}(x-h)$	(المقاربان) المحاذيان **Asymptotes** $y = k \pm \frac{b}{a}(x-h)$
$y = k \pm \frac{a}{e}$: ***directrices*** الدليلين	$x = h \pm \frac{a}{e}$: ***directrices*** الدليلين

كامل موسى الناصري

معلومات عامة على القطع الزائد :

- **طول المحور المرافق (التخيلي)** $2\,b$ = *Conjugate axis*
- **طول المحور الأساسي (الحقيقي)** $2\,a$ = *Transverse axis*
- **ميل المستقيم المحاذي يساوي** $\pm\dfrac{b}{a}$ **إذا كان المحور الأساسي يوازي محور السينات.**
- **ميل المستقيم المحاذي يساوي** $\pm\dfrac{a}{b}$ **إذا كان المحور الأساسي يوازي محور الصادات.**
- **المركز منتصف قطعة المستقيم الواصلة بين الرأسين أو الواصلة بين البؤرتين.**
- c = **بعد البؤرة عن المركز ،** a = **بعد الرأس عن المركز ، وأن** $a^2+b^2=c^2$
- **شكل الصيغة القياسية** Standard form **لمعادلة القطع الزائد**

هي : $$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad or \quad \frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

- **معادلة دليلي القطع الزائد هما** $x=\pm\dfrac{a}{e}\pm h$ **إذا كان محور القطع يوازي** x

أو يساوي $y=\pm\dfrac{a}{e}\pm k$ **إذا كان محور التماثل يوازي محور** y **.   للاطلاع**

مثال : جد الرأسين والبؤرتين والمستقيمين المحاذيين وطول كل من المحورين الأساسي والمرافق وارسم القطع الزائد :

$Q1:\quad 9x^2-16y^2=144$

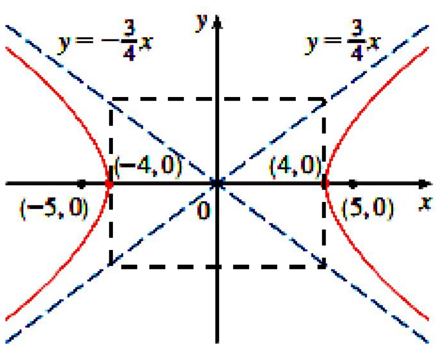
الحل : من قسمة طرفي المعادلة على ***144*** **تحول للصيغة القياسية فنحصل على :** $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$

المركز : $(0,0)$ ،

العدد الأول = $a^2=16 \Leftarrow a=4$ **على السينات** $\Leftarrow$ **الرأسان** $(\pm4,0)$ **فتحة لليمين وأخرى لليسار**

العدد الثاني = $b^2=9 \Leftarrow b=3 \Leftarrow (0,\pm3)$ **طرفي المحور المرافق**

البؤرتان : $a^2+b^2=c^2 \Rightarrow 16+9=c^2 \Rightarrow c=5 \Rightarrow (\pm5,0)$



طول المحور الأساسي(الحقيقي) = $2a=8$

المسافة بين البؤرتين = $2c=10$

طول المحور المرافق = $2b=6$

المحاذين : $y=\pm\dfrac{3}{4}x$

$9x^2-4y^2-72x+8y+176=0 \quad :Q2$

الحل : هذه المعادلة بالصيغة العامة تحول للصيغة القياسية بطريقة إكمال المربع وكما يلي :

$$9x^2-72x-4y^2+8y=-176 \quad \Rightarrow 9(x^2-8x)-4(y^2-2y)=-176$$

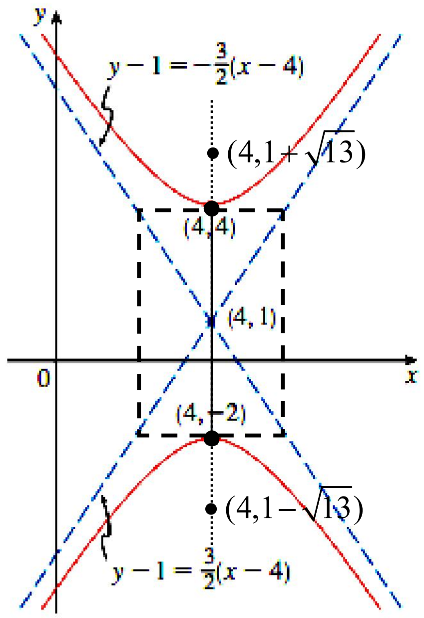
$$9(x^2-8x+16)-4(y^2-2y+1)=-176+\boxed{9}\times16+\left(\boxed{-4}\times1\right) \quad \Rightarrow 9(x-4)^2-4(y-1)^2=-36$$

$$\overset{\times(-1)}{\Rightarrow} \quad 4(y-1)^2-9(x-4)^2=36 \quad \overset{\div36}{\Rightarrow}\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(x-4)^2}{4}=1$$

تمثل معادلة قطع زائد مركزه $(4,1)$ **ومحور الاساسي** $x=4$ **<u>يوازي محور الصادات</u> أي البؤرتان والرأسان لهما نفس الاحداثي السيني وهو *4* .**

العدد الأول = *9 = a^2* ⇐ *a = 3* على الصادات ⇐ الرأسان $(4,1\pm3) \Leftarrow V_1(4,2)\,,\ V_2(4,-2)$

العدد الثاني = *4 = b^2* ⇐ *b = 2* ⇐ طرفي المحور المرافق $(4\pm2,1)$



$$a^2+b^2=c^2 \quad \Rightarrow \quad 9+4=c^2 \quad \Rightarrow c=\sqrt{13}$$

$$\text{the foci} \ :\left(4\,,1\pm\sqrt{13}\right)=F_1(4,1+\sqrt{13})\,,\ F_2(4,1-\sqrt{13})$$

طول المحور الأساسي : $2a=6$

طول المحور المرافق : $2b=4$

المستقيمان المحاذيان للاطلاع : $y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$

$$y-1=\pm\frac{3}{2}(x-4)$$

الاختلاف المركزي : $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{3}>1$

أمثلة:جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومحوريه منطبقين على محوري الاحداثيين والذي :

***Q1* : رأساه** $(0,\pm1)$ **والمستقيم** $2x-y=0$ **دليلا له .للاطلاع**

الحل : رأساه $(0,\pm1)$ ⇐ $a=1$ **على الصادات**

الدليل : $y=2x$ ⇐ $\frac{a}{b}=2$ ⇐ $b=\frac{a}{2}$ ⇐ $b=\frac{1}{2}$

المعادلة هي : $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ ⇐ $y^2-4x^2=1$

كامل موسى الناصري

Q2 : *بؤرتاه $(\pm 10,0)$ وميل مستقيم محاذي له يساوي $\frac{3}{4}$ للاطلاع

الحل : بؤرتاه $(\pm 10,0) \Leftarrow c=10$ **على السينات**

محور القطع هو محور x لذا فميل المماس = $\frac{b}{a} \Leftarrow \frac{b}{a}=\frac{3}{4} \Leftarrow b=\frac{3}{4}a$

فيثاغورس : $a^2+b^2=c^2 \Rightarrow \frac{16}{16}a^2+\frac{9}{16}a^2=100 \Rightarrow \frac{25}{16}a^2=100 \Rightarrow a=8$

$b=\frac{3}{4}a \Rightarrow b=\frac{3}{4}\times 8 \Rightarrow b=6$ **المعادلة هي :** $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$

Q3: **بؤرتاه** $(0,\pm 10)$ **واختلافه المركزي يساوي** $\frac{5}{4}$

الحل: من البؤرتين $c=10$ **على الصادات**

$e=\frac{5}{4}$ **لكن** $e=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{5}{4}=\frac{c}{a}$ **لكن** $c=10 \Rightarrow \frac{5}{4}=\frac{10}{a} \Rightarrow a=8$

$a^2+b^2=c^2 \Rightarrow 64+b^2=100 \Rightarrow b=6$ **المعادلة هي :** $\frac{y^2}{64}-\frac{x^2}{36}=1$

Q4: **بؤرتاه** $(0,\pm 3)$ **ورأساه** $(0,\pm 1)$

الحل : $a=1 \;;\; c=3$ **و على الصادات .**

$a^2+b^2=c^2 \Rightarrow 1+b^2=9 \Rightarrow b=\sqrt{8}$ **المعادلة هي :** $\frac{y^2}{1}-\frac{x^2}{8}=1$

Q5: **بؤرتاه** $(\pm 6,0)$ **ويمر من** $(\pm 4,0)$

الحل : $a=4 \;;\; c=6$ **وكلاهما على السينات .**

$a^2+b^2=c^2 \Rightarrow 16+b^2=36 \Rightarrow b=\sqrt{20}$ **المعادلة هي :** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$

Q6 : بؤرتاه على محور y ويمر من النقطتين $(2,2),(4,\sqrt{13})$ **ومركزه نقطة الأصل .**

الحل : $(2,2)$ تحقق المعادلة : $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{4}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1 \;\ldots\ldots(1) \qquad \times(-4)$

تحقق المعادلة $(4,\sqrt{13})$ **:** $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{13}{a^2}-\frac{16}{b^2}=1 \;\ldots\ldots(2)$

$$(1)\ldots\ldots \frac{-16}{a^2}+\frac{16}{b^2}=-4$$

$$(2)\ldots\ldots \frac{13}{a^2}-\frac{16}{b^2}=1$$

بجمع طرفي المعادلتين نحصل على .

$\frac{-3}{a^2}=-3 \Rightarrow a^2=1$ **هذا الناتج يعوض بالمعادلة (١) نحصل على :** $b^2=\frac{4}{3}$

المعادلة هي : $\frac{y^2}{1}-\frac{3x^2}{4}=1$

كامل موسى الناصري

Q7 : بؤرتاه $(\pm 2\sqrt{15}\,,0)$ ويمر من النقطة $(4\,,\sqrt{3})$

الحل : من البؤرتين : $c = 2\sqrt{15}$ وعلى السينات ; $a^2 + b^2 = 60 \Leftarrow \boxed{a^2 = 60 - b^2}$ 1

الزائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ يمر من النقطة $(4\,,\sqrt{3})$ فتحقق معادلته :

$$\frac{16}{a^2} - \frac{3}{b^2} = 1 \overset{\times a^2 b^2}{\Leftarrow} \quad 16b^2 - 3a^2 = a^2 b^2 \quad .....(2)$$

ومن تعويض المعادلة الأولى بالثانية نحصل على : $16b^2 - 3(60 - b^2) = (60 - b^2)b^2$

$$16b^2 - 180 + 3b^2 = 60b^2 - b^4 \Leftarrow b^4 - 41b^2 - 180 = 0 \Leftarrow (b^2 - 45)(b^2 + 4) = 0 \Leftarrow b^2 = 45$$

لكن : $a^2 = 60 - b^2 \Leftarrow a^2 = 60 - 45 \Leftarrow a^2 = 15$ فالمعادلة تكون : $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{45} = 1$

Q8 : محوره الأساسي هو محور x واختلافه المركزي $\frac{1}{2}\sqrt{7}$ وطول محوره المرافق يساوي $4\sqrt{3}$

ومركزه نقطة الأصل.

الحل: المحور المرافق $2b = 4\sqrt{3} \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$

الاختلاف المركزي : $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \Rightarrow \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \Rightarrow \frac{7}{4} = \frac{a^2 + 12}{a^2} \Rightarrow$

عوض (١) بالمعادلة (٢) : $7a^2 = 4a^2 + 48 \Rightarrow a^2 = 16$

المعادلة تصبح : $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{12} = 1$

Q9 : قطعان أحدهما زائد والآخر ناقص كل منهما يمر من بؤرة الآخر معادلاتهما $m x^2 + 12y^2 = n$, $4x^2 + y^2 = 4$ ، جد قيمة العددين الحقيقيين m , n .

الحل : لنأخذ المعادلة الثانية $4x^2 + y^2 = 4$ تمثل معادلة لقطع ناقص محوره هو y ، تحول للصيغة

القياسية . $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftarrow$

الناقص : $a^2 = 4 \Leftarrow a = 2$ على الصادات $\Leftarrow V_1(0,4)\,, V_2(0,-4)$

$b^2 = 1 \Leftarrow b = 1$

$a^2 = b^2 + c^2 \Leftarrow 4 = 1 + c^2 \Leftarrow c = \sqrt{3} \Leftarrow F_1(0,\sqrt{3})\,, F_2(0,-\sqrt{3})$

من مشاهدة الرسم المجاور :

الزائد : $a=\sqrt{3}$

$c = 2$ وعلى الصادات

$a^2+b^2=c^2 \Rightarrow 3+b^2=4$

$\Rightarrow \quad b=1$

معادلة الزائد هي :

$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{3}-\frac{x^2}{1}=1 \overset{\otimes(36)}{\Rightarrow}$

: $-36x^2+12y^2=36$

لكـــــن $mx^2+12y^2=n$

$m=-36 \quad , \quad n=36$

Exercises 2.3

س١:جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومحوريه منطبقين على محوري الاحداثيين والذي:

١) بؤرتاه $(\pm4,0)$ ويمر من النقطة $(3,-1)$ ثم جد معادلة مماسه عند $(3,-1)$

٢) * بؤرتاه $(0,\pm4)$ واحد محاذييه $3y=x$

٣) محوره القاطع هو محور x ويمر بالنقطتين $(4,3),(2,1)$

الأسئلة من ٢ الى ٧ جد البؤرتين والرأسين والمحاذيين وارسم القطع الزائد :

$(2)\quad \frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1 \qquad (3)\quad \frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{36}=1 \qquad (4)\quad y^2-x^2=1$

$(5)\quad 9x^2-4y^2=36 \qquad (6)\quad 2y^2-3x^2-4y+12x-28=0$

$(7)\quad 16x^2-9y^2+64x-90y-305=0$

٨) لتكن $P(x,y)$ من نقط قطع زائد بؤرتاه $F_1(0,3)\ ,\ F_2(0,-3)$ جد معادلته إذا علمت أن : $|PF_1-PF_2|=4$

جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل والذي

(a) طرفي محوره المرافق $(\pm 6, 0)$، الاختلاف المركزي = 2 .

(b) الرأسان $(-8, 0)$ ، $(8, 0)$ والدائرة $x^2 + y^2 = 100$ تمر من بؤرتيه.

(c) محوره الأساسي على *y-axis* ويمر من $(-2\sqrt{3}, 12)$ وطول محوره الأساسي يساوي ثلاثة أمثال طول محوره المرافق

الأسئلة من ١٠ الى ٢٤ جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتيه منطبقتان على أحد محوري الاحداثيين والذي :

١٠ : بؤرتاه $(0, \pm 4)$ وطول محوره الأساسي = 6 وحدة .

١١ : إحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 24x = 0$ وطول محوره المرافق = 8 وحدات .

١٢ : بؤرتاه هما بؤرتا القطع الناقص $5x^2 + y^2 = 20$ واختلافه المركزي = 2

١٣:إحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 20x = 0$ ومجموع طولي محوريه الحقيقي والمرافق 14وحدة

١٤ : بؤرتاه من نقط محور السينات وإحدى البؤرتين تبعد عن الرأسين بالبعدين 2 ، 10 وحدة .

١٥ : بؤرتاه من نقط محور الصادات وطول محوره المرافق 12 وحدة والنسبة بين المسافة بين رأسيه إلى المسافة بين بؤرتيه $\frac{4}{5}$.

١٦ : بؤرتاه من نقط محور الصادات وطول محوره المرافق يساوي طول المحور الأكبر للقطع الناقص $x^2 + 5y^2 = 16$ والمسافة بين بؤرتيه تساوي المسافة بين بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 20x = 0$ ودليله .

١٧ : بؤرتاه من نقط محور السينات والمسافة بينهما $2\sqrt{10}$ وحدة ويمر من النقطة $(5.-4/3)$.

١٨ : إحدى بؤرتيه $(0, -4\sqrt{5})$ وطول محوره الحقيقي يساوي ضعف طول محوره المرافق .

١٩: يمس دليل القطع المكافئ $x^2 + 16y = 0$ والدائرة $x^2 + y^2 = 25$ تمر من بؤرتيه .

٢٠: بؤرتاه هما بؤرتا القطع الناقص $0.005x^2 + 0.01y^2 = 1$ وطول محوره الحقيقي يزيد على طول محوره المرافق بمقدار ٤ وحدات .

٢١: يمر من بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 16x = 0$ ويمر من $(20/3, 4)$ ثم جد نصفي القطرين البؤريين والمارين من نفس النقطة .

٢٢: بؤرتاه هما رأسا القطع الناقص $x^2 + 4y^2 = 4$ ويمر من بؤرتي القطع الناقص نفسه .

كامل موسى الناصري

٢٣: طول محوره الحقيقي 6 وحدات وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر من النقطتين $\left(1,\pm 2\sqrt{5}\right)$

٢٤: بؤرتاه هما بؤرتا القطع الناقص $5x^2+9y^2=180$ وأحد رأسيه بؤرة القطع المكافئ $y^2-8x=0$

٢٥: القطع الزائد $h\,x^2+m\,y^2=36$ ، بؤرتاه هما بؤرتا القطـــع النـــاقص $5x^2+9y^2=180$ وأحـــد رأسيه هو بؤرة القطع المكافئ $y^2-8x=0$ ، جد قيمة $h\,,\,m$

26: القطع الزائد $h\,y^2-4x^2+h=0$ ، مجموع مربعي طولي محوريه الحقيقي والمرافـــق يســـاوي 10 وحدة طول ، جد قيمة h .

س 27: قطعان أحدهما زائد والآخر ناقص مركزاهما نقطة الأصل ومحوراهما المرافقين يقعان علـــى أحـــد محوري الاحداثيين لهما مماس مشترك هو دليل القطع المكافئ $x^2+20y=0$ ، والمســـافة بـــين أقـــرب بؤرتين لهما تساوي 4 وحدة طول ، والزائد يمر من $\left(\sqrt{24}\,,\sqrt{50}\right)$، جد معادلة كل منهما.

س28: جد مساحة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحور بؤرتيه هو محور y والذي يقطع القطع المكافئ $x^2+8y=0$ في نقطتين احداثيهما الصادي يساوي -2 والنسبة بين طولي محوريه كنسبة $1:2$

س 29: جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(0,\pm 6)$ إذا علمت بان اختلافه المركزي يساوي $\frac{3}{2}$

س30: جد معادلة القطع الزائد الذي رأساه $\left(0,\pm 2\sqrt{5}\right)$ إذا علمت بان اختلافه المركزي يساوي $\frac{3}{2}$

س31 :

جد معادلة القطع الناقص السيني والذي مركزه نقطة الأصل ومساحة منطقته 7π وحدة مربعة والقيمة التقريبية لطول محيطه هي 10π وحدة طول.

س 32: جد معادلة المستقيم المماس للقطع الزائد الذي بؤرتاه $\left(\pm\sqrt{22}\,,0\right)$ عند النقطة $(6,-2)$

في الموقع التالي تجد حل التدريبات : www.alnassiry.com

كامل موسى الناصري